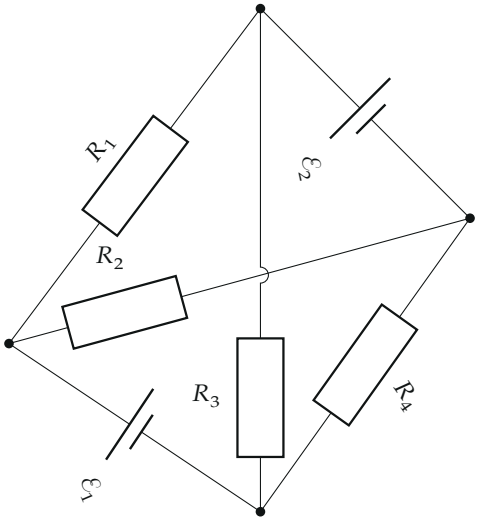
Электротетраэдр

Задача 5. [ВсОШ 2023/24, 10 класс, задача 5] «Электротетраэдр».

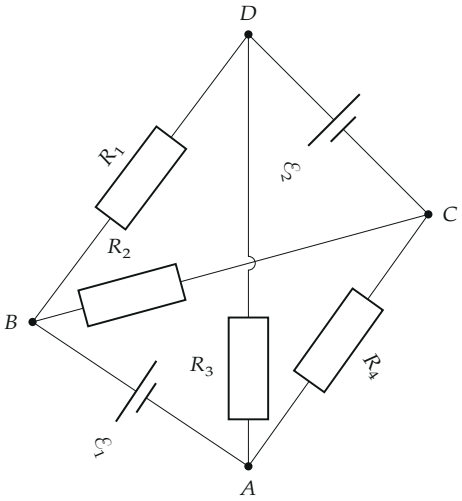


Электрическая цепь представляет собой тетраэдр, в двух противоположных рёбрах которого находятся первый и второй идеальные источники постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ соответственно. В остальных рёбрах расположены четыре резистора R_1, R_2, R_3 и R_4 (см. рис.). Значения ЭДС источников и сопротивление одного из резисторов известны: $\mathcal{E}_1 = 6$ В, $\mathcal{E}_2 = 12$ В, $R_2 = 3$ Ом. Величина силы тока через первый источник равна $I_1 = 1$ А и не изменяется при смене полярности подключения этого источника. Величина силы тока через второй источник при указанной на рисунке полярности равна $I_2 = 2$ А. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

1. Чему будет равна величина силы тока через второй источник, если полярность первого источника изменить?
2. Найдите величину силы тока через второй источник, если: а) первый источник удалить из цепи; б) первый источник заменить перемычкой с нулевым сопротивлением.
3. Чему равны сопротивления резисторов R_1, R_3 и R_4?

▲ **Решение. Что происходит.** Тетраэдр — это мост: если «развернуть» его на плоскость, четыре резистора образуют четырёхугольник, а источники стоят в двух его диагоналях. Цепь линейная, поэтому ток каждого источника — сумма токов, вызванных каждым источником по отдельности (метод наложения). Главная идея: ток первого источника не зависит от его полярности только тогда, когда второй источник через него тока не гонит, то есть мост сбалансирован. А сбалансированный мост сбалансирован для обеих диагоналей — источники друг друга «не чувствуют».

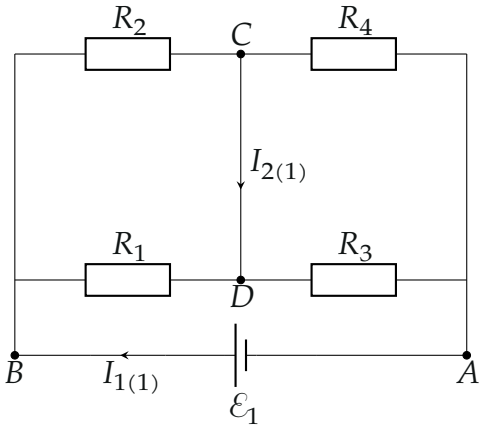
Обозначения. A, B — выводы первого источника, C, D — второго; $I_{1(1)}$, $I_{2(1)}$ — токи через места первого и второго источников, когда работает только первый (второй заменён перемычкой); $I_{1(2)}$, $I_{2(2)}$ — когда работает только второй. Развёрнутая схема: верхняя ветвь R_2 — C — R_4, нижняя R_1 — D — R_3, левые концы сходятся в B, правые — в A.



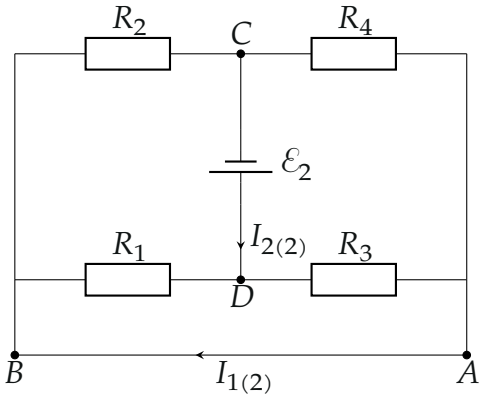
Вершины тетраэдра: первый источник — в ребре AB, второй — в ребре CD.

Пункт 1. Смена полярности первого источника.

1. Наложение. Идеальный источник без внутреннего сопротивления при «выключении» заменяем перемычкой. Работает только первый источник:



Работает только $\mathcal{E}_1$, второй источник заменён перемычкой CD. Работает только второй:



Работает только $\mathcal{E}_2$, первый источник заменён перемычкой AB. Полный ток через первый источник $I_1 = I_{1(1)} + I_{1(2)}$. При смене полярности первого источника меняет знак только $I_{1(1)}$: модуль тока становится $|-I_{1(1)} + I_{1(2)}|$. Он равен прежнему $|I_{1(1)} + I_{1(2)}|$, только если $I_{1(2)} = 0$ (случай $I_{1(1)} = 0$ невозможен: источник с ЭДС 6 В на конечном сопротивлении даёт ток).

2. Условие баланса. Ток в перемычке AB от второго источника равен нулю — значит, потенциалы A и B одинаковы. На второй схеме B и A — концы ветвей «R_2 — C — R_4» и «R_1 — D — R_3», соединённых в

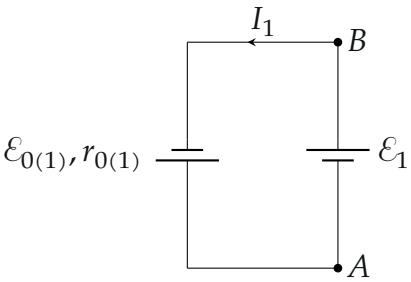
узлах C и D; одинаковые потенциалы концов — условие баланса моста (напряжения делятся в одном отношении):

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad \Leftrightarrow \quad R_1R_4 = R_2R_3.$$

3. Тот же баланс для второй диагонали. Переставив сомножители, $R_1/R_3 = R_2/R_4$ — а это условие баланса того же моста, но для другой диагонали: на первой схеме узлы C и D делят ветви «R_2 — R_4» и «R_1 — R_3» в одном отношении, их потенциалы равны, и первый источник не гонит тока через перемычку CD: $I_{2(1)} = 0$. Значит, ток второго источника определяется только им самим, $I_2 = I_{2(2)}$, и от полярности первого источника не зависит:

$$I_2' = I_2 = 2\ \text{А}.$$

Второй способ — эквивалентный источник. Всё, кроме первого источника, заменим эквивалентным источником с ЭДС $\mathcal{E}_0$ (показание идеального вольтметра на месте первого источника) и сопротивлением $r_0 = r_{AB}$:



Эквивалентная схема для первого источника. Ток $I_1 = |\mathcal{E}_0 \pm \mathcal{E}_1|/r_0$ не зависит от знака, только если $\mathcal{E}_0 = 0$: вольтметр между A и B показывает нуль — тот же баланс моста.

Пункт 2. Без первого источника.

а) *Первый источник удалили* (ветвь AB разорвана). Мост сбалансирован для диагонали CD: при работе второго источника A и B имеют один потенциал, и ветвь между ними — есть она или нет — тока не несёт. Сопротивление между C и D не меняется, ток тот же: 2 А.

б) *Заменили перемычкой.* Это ровно схема «работает только второй источник», ток в ней $I_{2(2)} = I_2$ (пункт 1): 2 А.

Пункт 3. Сопротивления.

1. Токи через сопротивления мостов. Раз источники друг друга не чувствуют, каждый работает на «своё» сопротивление. При перемычке CD (схема первого источника) R_1 и R_2 соединены параллельно (между B и узлом $C = D$), R_3 и R_4 — тоже; аналогично для второго:

$$\mathcal{E}_1 = I_1\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right),$$

$$\mathcal{E}_2 = I_2\left(\frac{R_2R_4}{R_2+R_4} + \frac{R_1R_3}{R_1+R_3}\right).$$

2. Минимум букв. Положим $R_1 = kR_2$, $R_4 = \alpha R_2$; из баланса $R_3 = R_1R_4/R_2 = \alpha k R_2$. Тогда $R_3 + R_4 = \alpha(1+k)R_2$, $R_1 + R_3 = k(1+\alpha)R_2$, и

$$\frac{\mathcal{E}_1}{I_1R_2} = \frac{k}{1+k} + \frac{\alpha k}{1+k} = \frac{k(1+\alpha)}{1+k},$$

$$\frac{\mathcal{E}_2}{I_2R_2} = \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha k}{1+\alpha} = \frac{\alpha(1+k)}{1+\alpha}.$$

3. Два уравнения. Перемножим — дроби сократятся:

$$\alpha k = \frac{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}{I_1I_2R_2^2} = \frac{6\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 9} = 4.$$

Числа подобраны так, что $\mathcal{E}_1/I_1 = \mathcal{E}_2/I_2 = 6$ Ом: сопротивления мостов для двух диагоналей равны:

$$\frac{k(1+\alpha)}{1+k} = \frac{\alpha(1+k)}{1+\alpha} \;\Rightarrow\; k(1+\alpha)^2 = \alpha(1+k)^2 \;\Rightarrow\; (k-\alpha)(1-\alpha k) = 0.$$

Так как $\alpha k = 4 \neq 1$, получаем $k = \alpha = 2$:

$$R_1 = R_4 = 2R_2 = 6\text{ Ом}, \qquad R_3 = 4R_2 = 12\text{ Ом}.$$

Обратите внимание: из условия «ток первого источника не зависит от полярности» следует только *отношение* сопротивлений (баланс); сами значения дают два известных тока.

Проверка. Баланс: $R_1R_4 = 36 = R_2R_3$. Сопротивление для первого источника $\frac{6\cdot3}{9} + \frac{12\cdot6}{18} = 2 + 4 = 6$ Ом, ток $6/6 = 1$ А; для второго $\frac{3\cdot6}{9} + \frac{6\cdot12}{18} = 2 + 4 = 6$ Ом, ток $12/6 = 2$ А — совпадает с условием. Прямой расчёт по правилам Кирхгофа (python) для обеих полярностей первого источника даёт $|I_1| = 1$ А и $I_2 = 2$ А.

Ответ. 1) 2 А; 2) а) 2 А, б) 2 А; 3) $R_1 = R_4 = 6$ Ом, $R_3 = 12$ Ом.