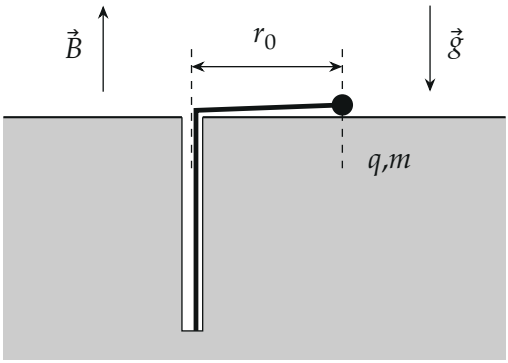
Две окружности

Задача 1. [ВсОШ 2023/24, 11 класс, задача 1] В толстой плите из непроводящего твёрдого материала перпендикулярно поверхности просверлено отверстие маленького диаметра, глубина которого меньше толщины плиты. К «дну» отверстия прикреплён один конец резинки с коэффициентом жёсткости k. Длина недеформированной резинки в точности равна глубине отверстия. На другом конце резинки прикреплена бусинка массы m, заряженная положительным зарядом q. Плита расположена горизонтально в поле тяжести. Поверхность плиты гладкая. Перпендикулярно поверхности плиты включено однородное магнитное поле, вектор индукции которого направлен противоположно вектору ускорения свободного падения. Величина индукции магнитного поля равна B. Растягивая резинку, бусинку смещают по поверхности плиты на расстояние r_0 от оси отверстия и отпускают, сообщив ей такую перпендикулярную резинке скорость, что бусинка движется по окружности.



1. Определите угловые скорости движения бусинки при вращении её по часовой стрелке и против часовой стрелки (если смотреть за её движением сверху).

Сила, действующая на бусинку, зависит и от её координаты $\vec{r}$, и от её скорости $\vec{v}$ линейным образом. Поэтому, если есть два разных закона движения $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$, описывающие некоторые движения бусинки, то уравнение $\vec{r}(t) = \alpha \cdot \vec{r}_1(t) + \beta \cdot \vec{r}_2(t)$ при любых постоянных α и

β правильно описывает закон физически реализуемого движения этой бусинки под действием таких же сил (ведь скорость и ускорение бусинки в любой момент времени будут описываться такими же комбинациями). Например, если бусинку из того же начального положения, что и в пункте 1, отпускают без начальной скорости, то закон её движения можно найти как результат наложения («суперпозиции») законов вращений, изученных Вами в этом пункте.

2. На какое минимальное расстояние к оси отверстия приблизится бусинка после отпускания без начальной скорости с расстояния r_0 от отверстия?
3. Через какое время τ после отпускания бусинка вновь окажется на расстоянии r_0 от оси отверстия?
4. Изобразите траекторию бусинки для случая $q^2B^2/(mk) = 1/2$. Через какое время после отпускания бусинка в первый раз окажется в исходной точке?

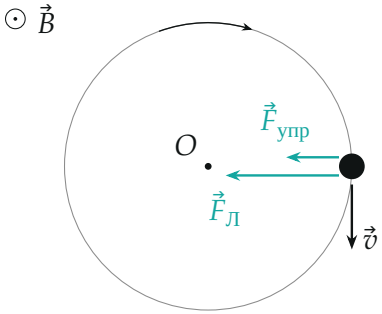
▲ **Решение.** **Что происходит.** Резинка перегибается через край отверстия, поэтому её растяжение равно расстоянию r от бусинки до оси, а сила упругости kr горизонтальна и направлена к оси. Вертикально бусинку держит плита (сила тяжести и реакция плиты скомпенсированы), магнитная сила лежит в плоскости плиты. Значит, движение плоское, а силы линейны по $\vec{r}$ и $\vec{v}$. Класс задачи — линейное уравнение движения: сумма двух его решений снова решение. План: сначала найдём два простых решения — вращения по окружности в обе стороны, потом из них сложим движение «из покоя».

Обозначения. Смотрим сверху: магнитное поле $\vec{B}$ направлено вверх, то есть на нас. O — ось отверстия, $\vec{r}$ — радиус-вектор бусинки из точки O. Положим

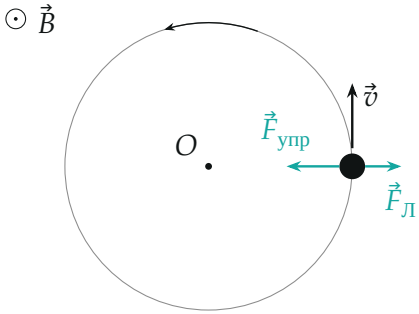
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \qquad \Omega = \frac{qB}{2m}.$$

Уравнение движения бусинки (второй закон Ньютона в проекции на плоскость плиты):

$$m\vec{a} = -k\vec{r} + q\,\vec{v} \times \vec{B}.$$



по часовой стрелке



против часовой стрелки

Вид сверху. Сила упругости направлена к оси O; сила Лоренца $q\vec{v} \times \vec{B}$ при вращении по часовой стрелке направлена к оси, против часовой — от оси. Длины стрелок по формулам пункта 1 для $\Omega = 0{,}6\,\omega_0$; стрелки $\vec{F}_{упр}$ и $\vec{F}_{Л}$ в левой части сдвинуты друг от друга, чтобы не слиться.

Пункт 1. Вращение по окружности. Бусинка идёт по окружности радиуса r_0 с постоянной угловой скоростью ω, значит, её ускорение $\omega^2 r_0$ направлено к центру O. Запишем второй закон Ньютона для бусинки в проекции на радиус, направленный к O. Проекция упругой силы равна kr_0. Скорость перпендикулярна радиусу и равна ωr_0, поэтому сила Лоренца по модулю $q\,\omega r_0 B$; она направлена к центру при вращении по часовой стрелке (в точке справа от O при вращении по часовой скорость направлена вниз, $\vec{B}$ — на нас, и вектор $\vec{v} \times \vec{B}$ смотрит влево, к оси) и от центра при вращении против часовой стрелки.

По часовой стрелке:

$$m\omega^2 r_0 = kr_0 + qB\omega r_0 \implies \omega^2 - 2\Omega\,\omega - \omega_0^2 = 0.$$

Против часовой стрелки:

$$m\omega^2 r_0 = kr_0 - qB\omega r_0 \implies \omega^2 + 2\Omega\,\omega - \omega_0^2 = 0.$$

Нужны положительные корни (угловая скорость — модуль, направле-

ние мы уже задали словами):

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} + \Omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{q^2B^2}{4m^2}} + \frac{qB}{2m} \quad \text{(по часовой)},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} - \Omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{q^2B^2}{4m^2}} - \frac{qB}{2m} \quad \text{(против часовой)},$$

причём $\omega_1 > \omega_2$. Обратите внимание: радиус r_0 сократился — обе силы, упругая и магнитная, пропорциональны r, поэтому угловая скорость при вращении по окружности *не зависит от радиуса*. Именно это позволит складывать вращения разных радиусов.

Проверка: корни дают $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$ и $\omega_1 - \omega_2 = 2\Omega = qB/m$. Без магнитного поля ($\Omega = 0$) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ — обычное вращение на резинке. Без резинки ($k \to 0$) $\omega_1 = qB/m$ — циклотронная частота, а $\omega_2 = 0$: в этом пределе бусинка просто стоит.

Второй способ — комплексная запись. Положим $z = x + iy$ (ось x вправо, ось y вверх, ось z на нас). Сила Лоренца $q\vec{v} \times \vec{B}$ имеет проекции $(qBv_y,\ -qBv_x)$, то есть в комплексной записи $-2im\Omega\dot{z}$, и уравнение движения принимает вид

$$\ddot{z} = -\omega_0^2 z - 2i\Omega\dot{z}.$$

Вращению по часовой стрелке отвечает $z = r_0 e^{-i\omega t}$: подстановка даёт $-\omega^2 = -\omega_0^2 - 2\Omega\omega$, то есть то же самое уравнение. Вращению против часовой, $z = r_0 e^{i\omega t}$, отвечает $\omega^2 + 2\Omega\omega - \omega_0^2 = 0$.

Пункт 2. Старт из покоя: два встречных вращения. Вращения пункта 1 — решения линейного уравнения $m\vec{a} = -k\vec{r} + q\vec{v} \times \vec{B}$, а сумма решений с постоянными коэффициентами тоже решение. Пусть бусинка в момент $t = 0$ находится в точке $(r_0, 0)$. Возьмём вращение по часовой $\vec{r}_1(t)$ (угловая скорость ω_1) и против часовой $\vec{r}_2(t)$ (угловая скорость ω_2), оба по окружности радиуса r_0 из этой точки, и составим

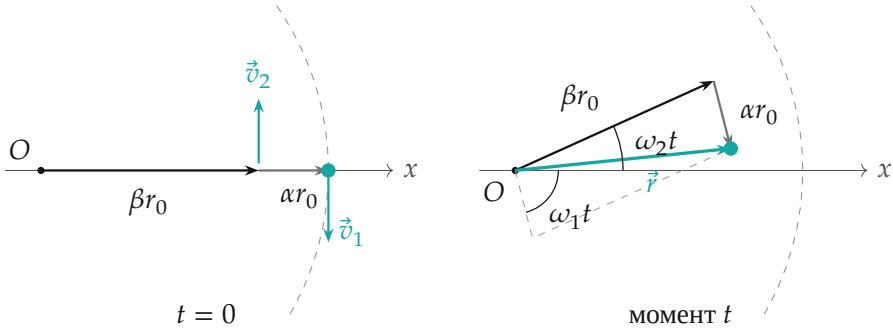
$$\vec{r}(t) = \alpha\,\vec{r}_1(t) + \beta\,\vec{r}_2(t).$$

Подберём α, β так, чтобы бусинка стартовала из той же точки и без скорости. Начальное положение: $(\alpha + \beta)\,\vec{r}_0 = \vec{r}_0$, откуда $\alpha + \beta = 1$. Начальные скорости направлены в противоположные стороны и по модулю равны $\omega_1 r_0$ и $\omega_2 r_0$, поэтому нулевая суммарная скорость требует $\alpha\,\omega_1 = \beta\,\omega_2$. Отсюда

$$\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \qquad \beta = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Так как решение уравнения движения с данными начальным положением и скоростью единственно, найденное $\vec{r}(t)$ и есть закон движения бусинки, отпущенной из покоя.

Картина получилась наглядная: вектор $\vec{r}(t)$ — сумма вектора длины αr_0, вращающегося по часовой стрелке с угловой скоростью ω_1, и вектора длины βr_0, вращающегося против часовой с ω_2. Угол между ними растёт со скоростью $\omega_1 + \omega_2$: $\varphi(t) = (\omega_1 + \omega_2)t$.



Слева — начало движения: вектор βr_0 (вращается против часовой стрелки, угловая скорость ω_2) и вектор αr_0 (по часовой, ω_1) лежат на одной прямой, их сумма равна r_0; скорости $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_1$ их концов равны по модулю ($\beta\omega_2 r_0 = \alpha\omega_1 r_0$) и противоположны, поэтому бусинка стоит. Справа — произвольный момент: векторы повернулись на $\omega_2 t$ и $\omega_1 t$, угол между ними $(\omega_1 + \omega_2)t = 100°$; бусинка на конце суммы $\vec{r}$ (параллелограмм — пунктиром). Построено для $\Omega = 0{,}6\,\omega_0$: $\alpha \approx 0{,}24$, $\beta \approx 0{,}76$.

Расстояние до оси по теореме косинусов (угол между складываемыми

векторами равен $\varphi = (\omega_1 + \omega_2)t$):

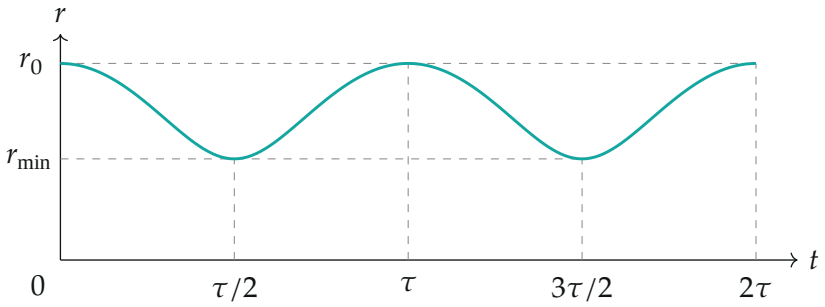
$$r^2(t) = \alpha^2 r_0^2 + \beta^2 r_0^2 + 2\alpha\beta\, r_0^2 \cos\varphi,$$

$$r(t) = \frac{r_0}{\omega_1 + \omega_2}\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos\left[(\omega_1 + \omega_2)t\right]}.$$

Расстояние меняется с циклической частотой $\omega_1 + \omega_2 = 2\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}$ и принимает значения от $|\beta - \alpha|\, r_0$ до $(\alpha + \beta)\, r_0 = r_0$.

Минимум достигается, когда векторы направлены противоположно ($\varphi = \pi$), и равен разности их длин. Так как $\beta > \alpha$,

$$r_{\min} = (\beta - \alpha)\, r_0 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\, r_0 = \frac{\Omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}}\, r_0 = \frac{qB}{\sqrt{q^2B^2 + 4mk}}\, r_0.$$



Расстояние от бусинки до оси отверстия (для $\Omega = 0{,}6\,\omega_0$). Период изменения r равен $\tau = 2\pi/(\omega_1 + \omega_2)$; максимумы r_0 — при $t = 0, \tau, 2\tau, \ldots$, минимумы $r_{\min}$ — посередине между ними.

Проверка вторым способом (без суперпозиции). Момент силы Лоренца относительно оси O равен $-\dfrac{qB}{2}\dfrac{d(r^2)}{dt}$ (сила упругости момента не создаёт: она направлена к оси), поэтому величина $mr^2\dot\varphi + \dfrac{qB}{2}r^2$ сохраняется; из начальных данных $\dot\varphi = 0$ при $r = r_0$ получаем $\dot\varphi = \Omega\,(r_0^2 - r^2)/r^2$. В точке минимума радиальная скорость равна нулю, и сохранение энергии, $\frac{1}{2}kr_0^2 = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot\varphi^2$, даёт $kr^2 = m\Omega^2(r_0^2 - r^2)$, то есть $r_{\min}^2 =$

$\dfrac{\Omega^2}{\omega_0^2+\Omega^2}\,r_0^2$ — то же значение. Пределы: при $B\to 0$ имеем $r_{\min}\to 0$ (бусинка колеблется через ось), при $k\to 0$ — $r_{\min}\to r_0$ (без резинки в магнитном поле покоящаяся бусинка остаётся на месте).

Пункт 3. Возвращение на расстояние r_0. Расстояние равно r_0 при $\cos\varphi=1$, то есть когда оба вектора снова смотрят в одну сторону. После старта угол между ними растёт от нуля со скоростью $\omega_1+\omega_2$, поэтому впервые они совпадут при $\varphi=2\pi$:

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}=\frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2+\Omega^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{k/m+q^2B^2/(4m^2)}}.$$

Проверка: при $B\to 0$ получаем $\tau=\pi/\omega_0=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\sqrt{m/k}$ — половина периода колебаний: бусинка, пройдя через ось, оказывается на таком же расстоянии с другой стороны. Размерность: $\sqrt{k/m}$ имеет размерность с^{-1} (как и qB/m), поэтому τ в секундах.

Пункт 4. Траектория при $q^2B^2/(mk)=1/2$. Тогда $q^2B^2=mk/2$ и

$$\Omega^2=\frac{q^2B^2}{4m^2}=\frac{k}{8m}=\frac{\omega_0^2}{8},$$

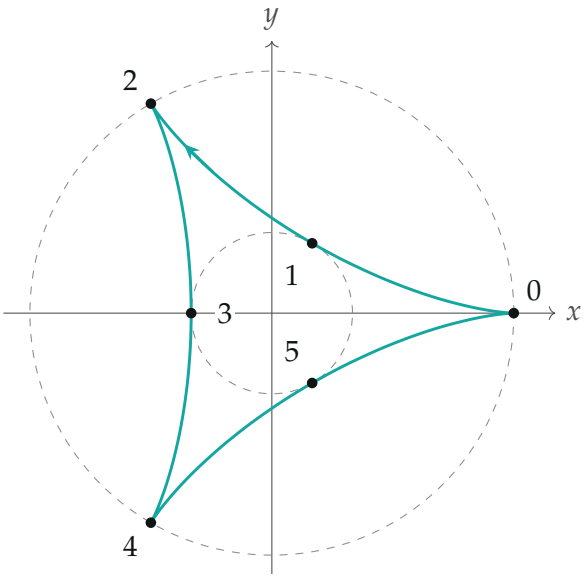
$$\omega_1=\omega_0\Big(\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big)=\sqrt{2}\,\omega_0,\quad \omega_2=\omega_0\Big(\frac{3}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big)=\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

Частоты относятся как $\omega_1:\omega_2=2:1$ — движение периодическое, траектория замкнутая. Коэффициенты суперпозиции $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{2}{3}$. В комплексной записи, с $\theta=\omega_2 t$ (за время, когда вектор βr_0 делает один оборот, вектор αr_0 делает два в другую сторону):

$$z(t)=r_0\Big[\tfrac{1}{3}\,e^{-2i\theta}+\tfrac{2}{3}\,e^{i\theta}\Big],\qquad \begin{cases}x=\dfrac{r_0}{3}(2\cos\theta+\cos 2\theta),\\ y=\dfrac{r_0}{3}(2\sin\theta-\sin 2\theta).\end{cases}$$

Расстояние до оси: $r=\dfrac{r_0}{3}\sqrt{5+4\cos 3\theta}$. Оно равно r_0 при $\theta=0,\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}$

и $\dfrac{r_0}{3}$ при $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$. Производная $\dot{z} \propto e^{i\theta} - e^{-2i\theta}$ обращается в нуль в точках $r = r_0$: там бусинка на мгновение останавливается и поворачивает (остриё траектории). В точках $r = r_0/3$ радиальная скорость равна нулю, а угловая нет, и траектория касается внутренней окружности. Это дельтоида — кривая с тремя остриями на окружности радиуса r_0, касающаяся окружности радиуса $r_0/3$.



Траектория при $q^2B^2/(mk) = 1/2$ (вид сверху, дельтоида). Точки $0, 1, \ldots, 5$ соответствуют $\omega_2 t = 0, \pi/3, \ldots, 5\pi/3$: чётные лежат на окружности радиуса r_0 (остриё), нечётные — на окружности радиуса $r_0/3$. Бусинка обходит кривую против часовой стрелки.

Исходная точка (точка 0) совпадает с положением бусинки, когда оба вектора суперпозиции одновременно возвращаются в начальное направление: $\omega_1 t = 2\pi n_1$ и $\omega_2 t = 2\pi n_2$. Первый раз это происходит при $n_2 = 1$, $n_1 = 2$, то есть за один период меньшей частоты:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

За это время расстояние до оси трижды проходит весь цикл от r_0 до $r_0/3$ и обратно (период изменения r равен $2\pi/(\omega_1+\omega_2)=T/3$), поэтому траектория имеет три острия. Обратите внимание: расстояние r_0 и исходная точка — не одно и то же: $r=r_0$ повторяется каждые $T/3$, а возвращение в ту же точку — раз в T: через $T/3$ и $2T/3$ бусинка в остриях, повёрнутых на 120° и 240°.

Проверка. Прямое численное интегрирование уравнения $m\vec{a}=-k\vec{r}+q\vec{v}\times\vec{B}$ (метод Рунге — Кутты) при $q^2B^2/(mk)=1/2$ из точки $(r_0,0)$ из покоя даёт за время T возвращение в $(r_0,0)$ со скоростью, равной нулю; $r_{\min}=r_0/3$ и $r_{\max}=r_0$. Для $r_{\min}$ формула пункта 2 даёт $\Omega/\sqrt{\omega_0^2+\Omega^2}=\sqrt{1/8}/\sqrt{9/8}=1/3$ — те же значения.

Смысл: из покоя бусинка в магнитном поле не падает на ось по прямой, а «закручивается», потому что набранная скорость тут же отклоняется силой Лоренца; траектория — сумма двух противоположных вращений.

Ответ. 1) по часовой стрелке $\omega_1=\sqrt{\dfrac{k}{m}+\dfrac{q^2B^2}{4m^2}}+\dfrac{qB}{2m}$, против часовой стрелки $\omega_2=\sqrt{\dfrac{k}{m}+\dfrac{q^2B^2}{4m^2}}-\dfrac{qB}{2m}$; 2) $r_{\min}=\dfrac{qB}{\sqrt{q^2B^2+4mk}}\,r_0$; 3) $\tau=\dfrac{\pi}{\sqrt{k/m+q^2B^2/(4m^2)}}$; 4) траектория — дельтоида: три острия на окружности радиуса r_0, касание окружности радиуса $r_0/3$; в исходной точке бусинка впервые окажется через $T=2\pi\sqrt{2m/k}$.