Лепёшка из ртути

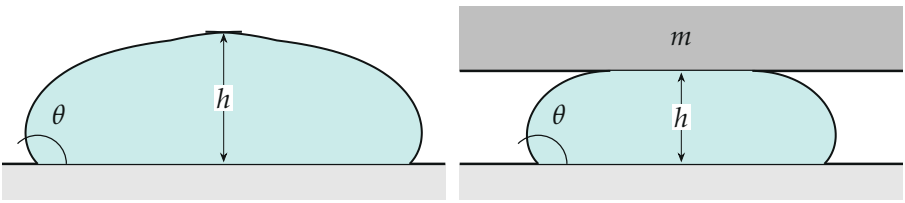
Задача 2. [ВсОШ 2023/24, 11 класс, задача 2] На верхнее горизонтальное основание сплошного кругового цилиндра с площадью поперечного сечения S аккуратно налили немного ртути. Краевой угол смачивания материала, из которого изготовлен этот цилиндр, равен θ. Коэффициент поверхностного натяжения ртути равен σ, плотность ртути равна ρ. Ускорение свободного падения равно g. Считайте, что параметры σ, ρ, g и S удовлетворяют неравенству:

$$\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \ll \sqrt{S}.$$

1. При каком минимальном значении объёма ртути V_0 она целиком покроет основание цилиндра?

На основание цилиндра наливают ртуть объёмом $V < V_0$. Сверху аккуратно помещают второй цилиндр с таким же поперечным сечением, но изготовленный из другого материала, который полностью не смачивается ртутью. Считайте расположение цилиндров и ртути всё время осесимметричным.

2. При какой минимальной массе m_1 верхнего цилиндра ртуть будет контактировать с основанием нижнего цилиндра по всей площади его поверхности?
3. При какой минимальной массе m_2 верхнего цилиндра ртуть вытечет из зазора между цилиндрами? Считайте, что граница между основанием цилиндра и его боковой поверхностью является закруглённой (радиус закругления много меньше толщины слоя ртути) и выпуклой.



а) б)

Поясняющий рисунок к условию (по горизонтали не в масштабе: на самом деле лепёшка много шире своей толщины). а) Ртуть на основании цилиндра, $V < V_0$. б) Сверху положен второй цилиндр массы m. Профили краёв рассчитаны по уравнению Лапласа для $\theta = 135°$.

▲ **Решение. Что происходит.** Условие $\sqrt{\sigma/\rho g} \ll \sqrt{S}$ говорит, что толщина слоя ртути (порядка капиллярной длины $\sqrt{\sigma/\rho g}$) много меньше его ширины. Значит, почти везде слой плоский и однородный, а всё интересное происходит в узкой полосе у края. Задача плоская: берём половину слоя вдоль края, на единицу длины края. Главная идея — горизонтальное равновесие этой половины: давление ртути распирает её наружу, поверхностное натяжение стягивает внутрь. Класс задачи — капиллярное равновесие: сила давления против силы натяжения. В трёх пунктах меняется одно: какое давление слой способен выдержать. Пока край свободен, это определяет угол θ; когда край упёрся в кромку цилиндра, предел больше.

Обозначения. h — толщина слоя, $S_к$ — площадь контакта ртути с основанием. Ось x направлена горизонтально наружу, от центра лепёшки. Все силы считаем на единицу длины края; давление отсчитываем от атмосферного, поэтому атмосфера нигде не фигурирует. Через P обозначим *горизонтальную силу давления* ртути на единицу длины сечения слоя.

Как действует поверхностное натяжение. Поверхность ртути — натянутая плёнка: вдоль неё на единицу длины действует сила σ. Каждый конец плёнки закреплён на твёрдом теле, и твёрдое удерживает его силой σ, направленной вдоль касательной к поверхности и *от плёнки*. Если линия контакта свободна, она стоит на таком месте, где угол ψ между основанием и поверхностью ртути (внутри ртути) равен краевому углу: $\psi = \theta$. Горизонтальная составляющая удерживающей силы на нижнем крае (в сторону $+x$, наружу) равна $\sigma\cos\psi$: при $\psi < 90°$ она направлена наружу, при $\psi > 90°$ — внутрь.

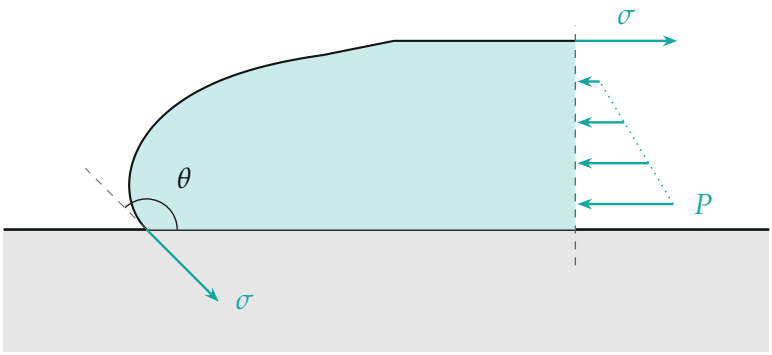
Пункт 1. Толщина лепёшки и объём V_0.

1. Сила давления. Давление на глубине $h - z$ равно $\rho g(h - z)$; горизонтальная сила давления на вертикальное сечение слоя, на единицу

его длины,

$$P = \int_0^h \rho g\,(h - z)\,dz = \frac{\rho g h^2}{2}.$$

Это площадь треугольника давления; среднее по высоте давление равно $\rho g h/2$.



Силы на левую половину слоя (вид сбоку, вдоль края; наружу — влево). Правая половина давит на сечение с силой P (треугольник давления) и тянет верхнюю плоскую плёнку силой σ внутрь. На линии контакта твёрдое удерживает конец плёнки силой σ вдоль касательной, от плёнки. Построено для $\theta = 135°$.

2. Равновесие половины слоя. Запишем условие равновесия ртути вместе с её поверхностью, лежащих левее сечения, в проекции на ось x. Наружу действует сила давления P. Внутрь: поверхность на верхней плоскости пересечена сечением, там её тянет вторая половина силой σ (на верхней плоскости касательная горизонтальна). Нижний край удерживает плёнку силой σ, горизонтальная составляющая которой $\sigma\cos\theta$ направлена наружу. Получаем

$$P - \sigma + \sigma\cos\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\rho g h^2}{2} = \sigma(1 - \cos\theta).$$

3. Толщина и объём. Отсюда

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \cos\theta)}{\rho g}}.$$

Толщина не зависит ни от объёма ртути, ни от размера лепёшки: если ртути больше, лепёшка расползается шире (её объём $V = S_к h$), пока не дойдёт до края основания. Тогда $S_к = S$, и это и есть минимальный объём:

$$V_0 = Sh = S\sqrt{\frac{2\sigma(1-\cos\theta)}{\rho g}}.$$

Второй способ для толщины (через кривизну поверхности). Поверхность изогнута так, что давление в ртути на глубине $h-z$ уравновешено силой натяжения: $\sigma\, d\varphi/ds = -\rho g(h-z)$ (здесь s — длина дуги поверхности от линии контакта вверх, φ — угол между касательной и горизонталью, направленной внутрь). Умножим на $\sin\varphi$ и учтём $dz = \sin\varphi\, ds$:

$$\sigma \sin\varphi\, d\varphi = -\rho g\,(h-z)\, dz.$$

Просуммируем от линии контакта ($\varphi = \theta$, $z = 0$) до плоской верхней части ($\varphi = 0$, $z = h$): $\sigma(\cos\theta - 1) = -\rho g h^2/2$ — то же уравнение.

Проверка: $\theta \to 0$ (ртуть смачивает) даёт $h \to 0$ — она растекается плёнкой; $\theta = 180°$ даёт $h = 2\sqrt{\sigma/\rho g}$ — наибольшая возможная толщина лужи. Размерность: $\sigma/(\rho g)$ — Н/м / (кг/м^3 · м/с^2) = м^2, h — в метрах, V_0 — в м^3.

Пункт 2. Масса m_1: ртуть занимает всё основание.

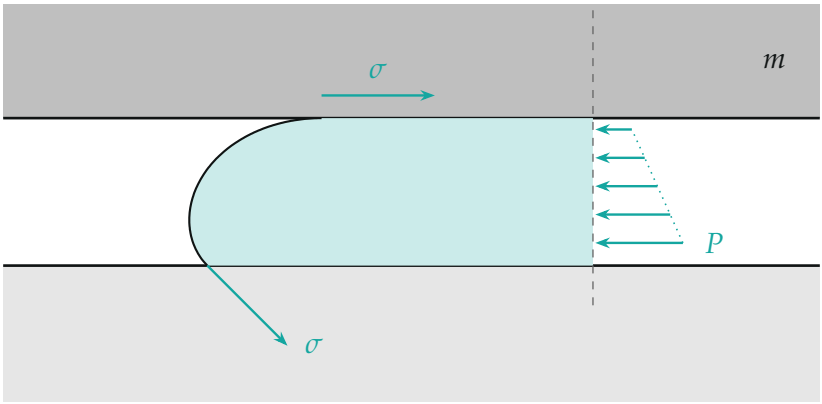
4. Что меняется с верхним цилиндром. Ртуть не смачивает его (угол 180°), поэтому поверхность ртути подходит к его нижней грани по касательной, горизонтально. Вертикальная составляющая силы натяжения здесь равна нулю, и вес цилиндра держит только давление ртути на его грань: давление под цилиндром p_0 (сверх атмосферного) удовлетворяет $p_0 S_к = mg$, то есть $p_0 = mg/S_к$. Давление в слое теперь $p_0 + \rho g(h-z)$, и

$$P = p_0 h + \frac{\rho g h^2}{2} = \frac{mgh}{S_к} + \frac{\rho g h^2}{2}.$$

Верхний край — конец плёнки с горизонтальной касательной: он удерживается внутрь силой σ, как плоская верхняя поверхность в пункте 1. Нижний край свободен: $\psi = \theta$. Значит, левая часть условия равновесия

та же, что в пункте 1:

$$P = \sigma(1 - \cos\theta).$$



Силы на левую половину слоя под цилиндром. Давление P теперь описывается трапецией: к треугольнику $\rho g(h - z)$ добавлено постоянное давление $p_0 = mg/S_к$ от веса цилиндра. На обоих концах поверхности твёрдое удерживает плёнку силой σ: вверху — горизонтально, внизу — вдоль касательной. Для $\theta = 135°$.

5. Площадь контакта и масса. Слой почти плоский, поэтому $h = V/S_к$. Подставим:

$$\sigma(1 - \cos\theta) = \frac{\rho g V^2}{2S_к^2} + \frac{mgV}{S_к^2}.$$

Отсюда площадь контакта $S_к = \sqrt{\dfrac{\rho g V^2/2 + mgV}{\sigma(1 - \cos\theta)}}$ растёт с массой цилиндра: чем тяжелее цилиндр, тем сильнее ртуть расплющена и тем шире лепёшка. Ртуть займёт всё основание при $S_к = S$:

$$m_1 = \frac{\sigma S^2(1 - \cos\theta)}{gV} - \frac{\rho V}{2}.$$

Обратите внимание: в давлении нельзя отбросить ни слагаемое $\rho gh/2$, ни $mg/S_к$ — они одного порядка.

Проверка: по пункту 1, $\sigma(1-\cos\theta) = \rho g V_0^2/(2S^2)$, поэтому

$$m_1 = \frac{\rho\,(V_0^2 - V^2)}{2V}.$$

Так видно: $m_1 > 0$ при $V < V_0$; при $V \to V_0$ масса $m_1 \to 0$ (ртути и без цилиндра хватает на всё основание); при $V \to 0$ масса $m_1 \to \infty$ (маленькую каплю по всему основанию не растянуть).

Пункт 3. Масса m_2: ртуть вытекает.

6. Что происходит после m_1. При $m > m_1$ ртуть уже занимает всё основание, $S_к = S$, и слой имеет толщину $h = V/S$. Нижняя линия контакта дошла до кромки цилиндра и остановилась на ней: ртуть не может сойти с основания, пока угол у кромки не станет достаточно большим. Поэтому дальше сила давления $P = mgh/S + \rho g h^2/2$ растёт с массой, а нижний край удерживает слой, поворачивая поверхность: угол ψ у кромки растёт.

Тот же баланс, что в пунктах 1–2, с произвольным ψ (верхний край без изменений):

$$P - \sigma + \sigma\cos\psi = 0 \quad\Longrightarrow\quad P = \sigma(1-\cos\psi).$$

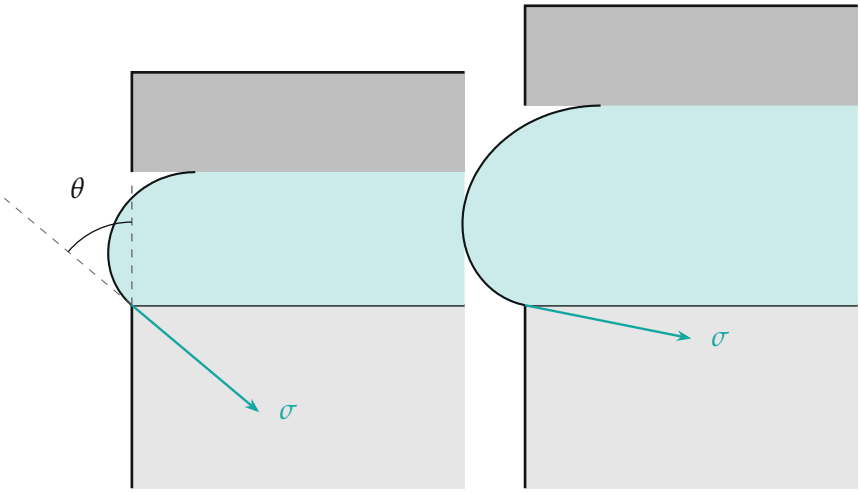
Вытекание начинается, когда P достигает наибольшего значения, которое способен удержать нижний край. Найдём предельный угол $\psi_{\max}$.

7. Предельный угол у кромки. Кромка — выпуклый прямой угол между основанием и боковой поверхностью (закругление мало, поэтому считаем её острой). Пока линия контакта стоит на кромке, угол ψ между поверхностью ртути и основанием может быть больше θ. Линия сойдёт на боковую стенку, когда угол между поверхностью и продолжением стенки вверх достигнет краевого угла θ: при большем угле ртуть сползает на стенку, это и есть вытекание. Продолжение стенки образует с основанием $90°$, поэтому в этот момент $\psi = \theta + 90°$.

Есть и второе ограничение. Из $P = \sigma(1-\cos\psi)$ видно, что наибольшее давление, которое способна удержать плёнка, равно 2σ — при $\psi = 180°$, когда поверхность у кромки горизонтальна и вся сила σ на-

правлена внутрь. Большее давление удержать нечем. Итак,

$$\psi_{\max} = \min(\theta + 90^\circ,\ 180^\circ).$$



а) б)

Предельное положение у кромки (вид сбоку, сечение). а) $\theta = 50^\circ < 90^\circ$: поверхность у кромки составляет угол θ с продолжением боковой стенки (пунктир); горизонтальная составляющая удерживающей силы равна $\sigma \sin\theta$. б) $\theta \geqslant 90^\circ$: касательная почти горизонтальна, вся сила σ почти горизонтальна. Профили рассчитаны по уравнению Лапласа. Верхняя линия контакта сдвинута внутрь по основанию цилиндра, поверхность выпучивается наружу за кромки.

8. Два случая.

Случай $\theta < 90^\circ$. Здесь $\theta + 90^\circ < 180^\circ$, $\psi_{\max} = \theta + 90^\circ$ и

$$P_{\max} = \sigma(1 - \cos(\theta + 90^\circ)) = \sigma(1 + \sin\theta).$$

Подставим $P = m_2 g V/S^2 + \rho g V^2/(2S^2)$ и найдём m_2:

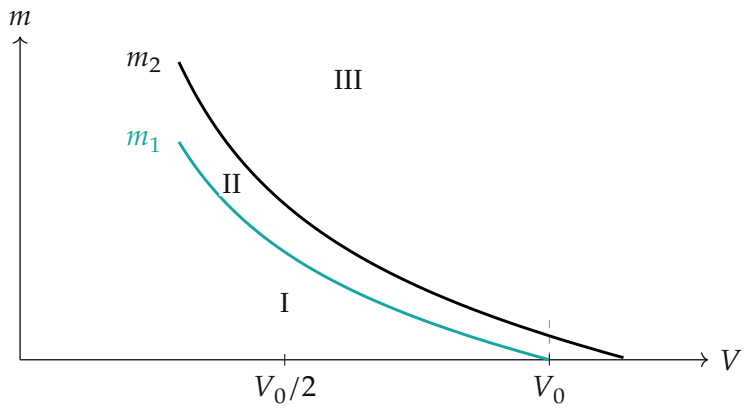
$$m_2 = \frac{\sigma S^2(1 + \sin\theta)}{gV} - \frac{\rho V}{2}.$$

Случай $\theta \geqslant 90°$. Теперь $\psi_{\max} = 180°$ (поверхность у кромки горизонтальна, как на рис. б), и $P_{\max} = 2\sigma$:

$$m_2 = \frac{2\sigma S^2}{gV} - \frac{\rho V}{2}.$$

Обратите внимание: при $\theta \geqslant 90°$ формулой первого случая пользоваться нельзя: она дала бы $\sigma(1+\sin\theta) < 2\sigma$, то есть меньший предел, чем есть на самом деле. Реальная ртуть относится ко второму случаю ($\theta > 90°$).

Проверка. Размерность: $\sigma S^2/(gV)$ — Н/м $\cdot$ м^4 / (м/с^2 $\cdot$ м^3) = кг, а ρV — тоже килограммы. На границе случаев при $\theta = 90°$ обе формулы дают $2\sigma S^2/(gV) - \rho V/2$. И всегда $m_2 > m_1$: разность $m_2 - m_1 = \dfrac{\sigma S^2}{gV}(\sin\theta + \cos\theta)$ при $\theta < 90°$ положительна, а при $\theta \geqslant 90°$ равна $\dfrac{\sigma S^2}{gV}(1+\cos\theta) \geqslant 0$. Интервал $m_1 < m < m_2$ — ртуть заполняет зазор и держится.



Три режима для $\theta = 120°$ *в безразмерных переменных: по горизонтали* V/V_0, *по вертикали* $m/(\rho V_0/2)$. *Ниже кривой* m_1 *ртуть не покрывает всё основание, между кривыми зазор заполнен и ртуть держится, выше* m_2 *вытекает. Кривые:* $m_1 = \nu^{-1} - \nu$ *и* $m_2 = \lambda\nu^{-1} - \nu$, $\nu = V/V_0$, $\lambda = 2/(1-\cos\theta) = 4/3$.

Смысл: второй порог выше первого, потому что у закреплённой на кромке поверхности есть запас по углу — от θ до $\psi_{\max}$.

Ответ. 1) $V_0 = S\sqrt{\dfrac{2\sigma(1-\cos\theta)}{\rho g}}$; 2) $m_1 = \dfrac{\sigma S^2(1-\cos\theta)}{gV} - \dfrac{\rho V}{2}$; 3) $m_2 = \dfrac{\sigma S^2(1+\sin\theta)}{gV} - \dfrac{\rho V}{2}$ при $\theta < \pi/2$ и $m_2 = \dfrac{2\sigma S^2}{gV} - \dfrac{\rho V}{2}$ при $\theta \geqslant \pi/2$.