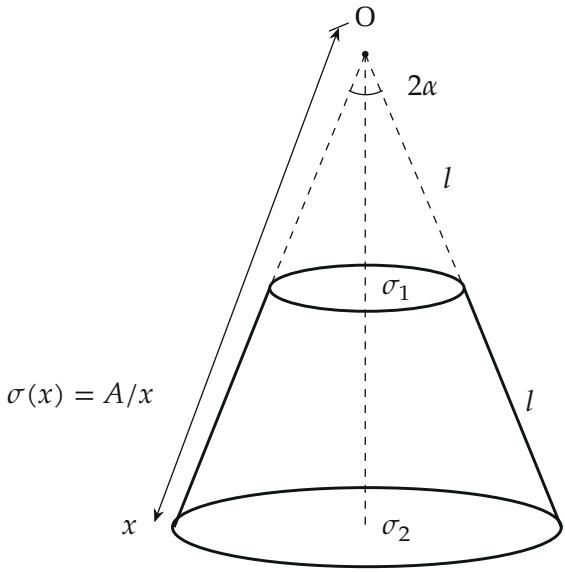
Усечённый конус

Задача 3. [ВсОШ 2023/24, 11 класс, задача 3] Прямой сплошной непроводящий усечённый конус заряжен по боковой поверхности так, что его поверхностная плотность заряда зависит от расстояния до вершины O целого конуса как $\sigma(x) = A/x$, где A — известная положительная константа. Основания усечённого конуса заряжены однородно с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2 (см. рис.). Длина образующей и половинный угол раствора конуса, дополняющего усечённый конус до целого, равны l и $\alpha = 30°$ соответственно, длина образующей усечённого конуса равна l.



1. Пусть $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_0$, где σ_0 — известная величина. Найдите вектор напряжённости $\vec{E}_O$ в точке O.

В конусе просверлили тонкий канал, так что пробный отрицательный заряд $-q$ ($q > 0$) массы m может без трения перемещаться вдоль оси симметрии конуса. Далее справедливо $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$.

2. Докажите, что существует положение равновесия пробного заряда, не зависящее от значения σ_0. Найдите это положение равновесия. В качестве ответа приведите расстояние от него до точки O.

3. При каких значениях σ_0 найденное положение равновесия будет устойчивым? Для значений, соответствующих устойчивому равновесию, найдите период малых колебаний пробного заряда в окрестности положения равновесия.

Примечание: конус закреплён, диэлектрическая проницаемость усечённого конуса $\varepsilon = 1$, влиянием силы тяжести и явлениями магнетизма пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Поле создают два заряженных объекта, и у каждого своя удобная картинка. Боковую поверхность разрежем вдоль образующих на узкие полоски. Площадь полоски на расстоянии x от вершины пропорциональна x, а плотность A/x обратно пропорциональна x: заряд на единицу длины полоски *одинаков* по всей длине. Значит, боковая поверхность — набор одинаково заряженных стержней вдоль образующих. Основания — плоские заряженные круги; их поле удобно считать через телесный угол. Класс задачи — суперпозиция полей, а в пункте 3 ещё и малые колебания: силу линеаризуем около равновесия.

Обозначения. Ось z направим по оси конуса от вершины O к основаниям, $z = 0$ в точке O. Радиусы оснований $r_1 = l\sin\alpha = l/2$ и $r_2 = 2l\sin\alpha = l$, их плоскости $z_1 = l\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}l$ и $z_2 = \sqrt{3}\,l$. Боковая поверхность — $l \le x \le 2l$, где x — расстояние до вершины вдоль образующей. E_z — проекция напряжённости на ось z, $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$. В точках на оси из осевой симметрии $\vec{E}$ направлен вдоль оси.

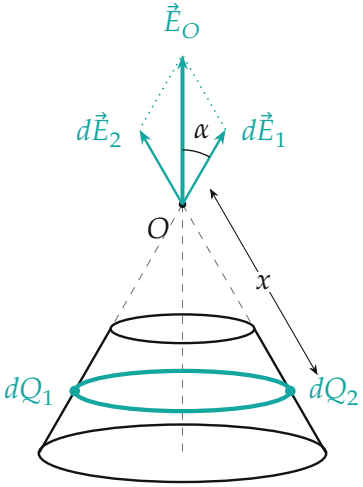
Пункт 1. Поле в вершине.

1. Основания. Элемент слоя dS с плотностью σ создаёт нормальную составляющую поля $k\sigma\, dS\cos\delta/r^2 = \dfrac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\,d\Omega$, где $d\Omega = dS\cos\delta/r^2$ — телесный угол, под которым элемент виден из точки. Для всего слоя $E_n = \dfrac{\sigma\,\Omega}{4\pi\varepsilon_0}$; на оси круга других составляющих нет, а для круга радиусом R на расстоянии y по оси $\Omega = 2\pi(1 - y/\sqrt{y^2+R^2})$.

Оба основания видны из вершины O внутри одного конуса с половинным углом α, то есть под одним телесным углом Ω_O, а нормальные составляющие их полей направлены одинаково. Поэтому

$$E_O^{\text{осн}} = \frac{(\sigma_1+\sigma_2)\,\Omega_O}{4\pi\varepsilon_0} = 0 \qquad (\sigma_1 = -\sigma_2).$$

2. Боковая поверхность: кольца. Кольцо на расстоянии x от вершины имеет радиус $x\sin\alpha$, ширину dx вдоль образующей и заряд $dQ = \dfrac{A}{x}\,2\pi x\sin\alpha\,dx = 2\pi A\sin\alpha\,dx$. Все его точки на расстоянии x от O и видны под углом α к оси; поперечные составляющие противоположных элементов сокращаются, поэтому поле кольца в O направлено вдоль оси, его модуль $k\,dQ\cos\alpha/x^2$.



Кольцо на расстоянии x от вершины и поля двух противоположных элементов в точке O; сумма направлена вдоль оси от заряда, то есть вверх.

Просуммируем кольца от $x = l$ до $x = 2l$:

$$E^{\text{бок}} = \int_l^{2l} \frac{k\,2\pi A\sin\alpha\cos\alpha}{x^2}\,dx = \frac{A\sin\alpha\cos\alpha}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{2l}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16}\,\frac{A}{\varepsilon_0 l}.$$

Заряд боковой поверхности положителен, поэтому поле в O направлено от неё. Итак,

$$E_O = \frac{\sqrt{3}}{16}\,\frac{A}{\varepsilon_0 l},$$

направление — вдоль оси, от усечённого конуса через вершину O (против оси z).

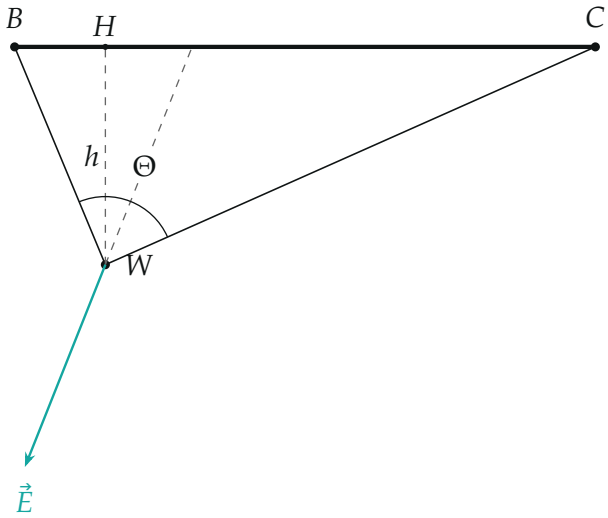
Второй способ — стержни: образующая — стержень на прямой через O с плотностью $\lambda = A\sin\alpha\, d\varphi$; его поле на продолжении $k\lambda(\frac{1}{l} - \frac{1}{2l})$, осевая составляющая — с множителем $\cos\alpha$; сумма по φ от 0 до 2π даёт то же $\dfrac{\sqrt{3}}{16}\dfrac{A}{\varepsilon_0 l}$.

Проверка: A измеряется в Кл/м, поэтому $A/(\varepsilon_0 l)$ — в В/м. Численное интегрирование (python) даёт $E^{\text{бок}} = 0{,}1083\, A/(\varepsilon_0 l)$, а $\sqrt{3}/16 = 0{,}1083$.

Пункт 2. Положение равновесия.

3. Поле стержня. Пусть стержень BC с линейной плотностью λ лежит на прямой, отстоящей от точки W на h. Поле стержня в W направлено *вдоль биссектрисы угла* $BWC = \Theta$ от стержня, а его модуль равен $\dfrac{2k\lambda}{h}\sin\dfrac{\Theta}{2}$.

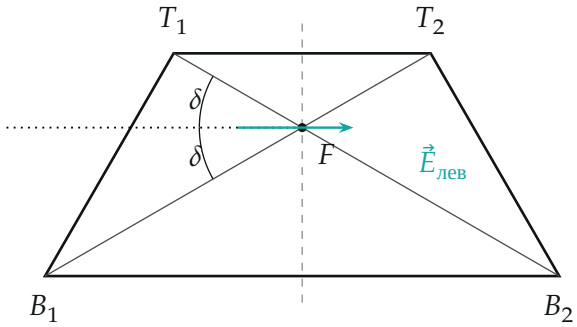
Доказательство. Элемент стержня, видный под углом $d\theta$ на луче под углом θ к перпендикуляру WH, имеет длину $dl = h\, d\theta/\cos^2\theta$ и находится на расстоянии $r = h/\cos\theta$. Его поле $k\lambda\, dl/r^2 = k\lambda\, d\theta/h$ направлено вдоль луча. Такое же поле создаёт элемент дуги радиусом h с центром W на том же луче ($k\lambda h\, d\theta/h^2$). Значит, поле стержня равно полю дуги, видимой под тем же углом Θ; дуга симметрична относительно биссектрисы, откуда направление, а сумма проекций на биссектрису даёт модуль.



Поле стержня BC в точке W: вдоль биссектрисы угла $BWC = \Theta$ (пунктир), от стержня; h — расстояние от W до прямой стержня.

4. Положение равновесия. Образующие — такие стержни: у каждой $\lambda = A \sin\alpha\, d\varphi$, а плоскость, в которой лежат точка W на оси и образующая, — осевая, и поле стержня лежит в этой плоскости. Если в какой-то точке F биссектриса угла, под которым образующая видна из F, перпендикулярна оси, то осевая составляющая поля каждой образующей в F равна нулю, а поперечные составляющие сокращаются по симметрии.

Покажем, что это так в точке F пересечения диагоналей T_1B_2 и T_2B_1 осевого сечения (равнобокой трапеции с основаниями l и $2l$). Треугольники FT_1T_2 и FB_2B_1 подобны (основания параллельны, углы при F вертикальные) и равнобедренные (F на оси симметрии), поэтому их углы при основаниях равны. А эти углы равны углам, которые лучи FT_1 и FB_1 образуют с горизонталью. Значит, FT_1 и FB_1 одинаково наклонены к горизонтали в разные стороны, и биссектриса угла T_1FB_1 горизонтальна.



Осевое сечение: равнобокая трапеция $T_1T_2B_2B_1$, F — пересечение диагоналей. Лучи FT_1 и FB_1 образуют с горизонталью (пунктир — биссектриса угла T_1FB_1) равные углы $\delta = 30°$. Поле стержня T_1B_1 в F горизонтально, от стержня; симметричный стержень T_2B_2 даёт горизонтальное поле навстречу.

Итак, $E_z^{\text{бок}}(F) = 0$. Основания: расстояния от F до них относятся как радиусы, $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{1}{2}$ ($y_1 = z_F - z_1$, $y_2 = z_2 - z_F$) — из подобия; поэтому $R_1/y_1 = R_2/y_2$, и основания видны из F под одним телесным

углом. Их поля направлены навстречу, и при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$

$$E_z^{\text{осн}}(F) = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}(\Omega_1 - \Omega_2) = 0 \quad \text{при любом } \sigma_0.$$

Значит, в F сила на пробный заряд равна нулю независимо от σ_0, то есть F — положение равновесия. Из $y_1 : y_2 = 1 : 2$ имеем $z_F = z_1 + \frac{1}{3}(z_2 - z_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}l + \frac{\sqrt{3}}{6}l$:

$$OF = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,l = \frac{2l}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15\,l.$$

Других нулей внутри канала нет (см. график ниже).

Проверка: численное интегрирование (python) даёт $E_z^{\text{бок}}(2l/\sqrt{3}) \sim 10^{-16}$ и $E_z^{\text{осн}} = 0$ при разных σ_0.

Пункт 3. Устойчивость и период.

5. Что нужно найти. Сместим заряд вдоль оси на $\zeta \ll l$ от F вниз. В F поле нулевое, поэтому $E_z(z_F + \zeta) \approx E_z'\zeta$ ($E_z' = dE_z/dz$ в точке F), и на заряд $-q$ действует сила $-qE_z'\zeta$. Возвращающая она при $E_z' > 0$. Тогда $m\ddot{\zeta} = -qE_z'\zeta$ и $\omega^2 = qE_z'/m$. Найдём E_z' для боковой поверхности и для оснований.

6. Боковая поверхность. Пусть ψ_1 и ψ_2 — углы между осью z и направлениями из W на верхний и нижний концы образующей, $\Theta = \psi_1 - \psi_2$, угол биссектрисы с осью $\gamma = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)$. Осевая составляющая поля одной образующей (шаг 3, расстояние $h = z\sin\alpha$) равна $-\dfrac{2k\lambda}{h}\sin\dfrac{\Theta}{2}\cos\gamma$. Просуммируем по φ от 0 до 2π, подставив $\lambda = A\sin\alpha\,d\varphi$:

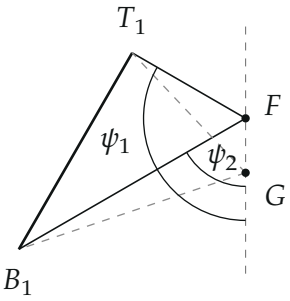
$$E_z^{\text{бок}}(z) = -\frac{4\pi kA}{z}\sin\frac{\Theta}{2}\cos\gamma = -\frac{A}{\varepsilon_0 z}\sin\frac{\Theta}{2}\cos\gamma.$$

В F имеем $\cos\gamma = 0$ ($\gamma = 90°$), поэтому в производной остаётся только слагаемое с $(\cos\gamma)'$:

$$E_z^{\text{бок}\prime} = \frac{A}{\varepsilon_0 z_F}\sin\frac{\Theta_F}{2}\sin\gamma_F\,\gamma' = \frac{A}{\varepsilon_0 z_F}\cdot\frac{1}{2}\cdot\gamma', \qquad \Theta_F = 60°.$$

Найдём γ'. Направление на точку на расстоянии ρ от оси и d от W при сдвиге W вдоль оси на dz поворачивается на $d\psi = \dfrac{\rho}{d^2}\,dz$ (смещение dz видно с расстояния d под углом $dz\sin\psi/d$, а $\sin\psi = \rho/d$). В F: для T_1 — $\rho = \dfrac{l}{2}$, $d^2 = \dfrac{l^2}{3}$, $\psi_1' = \dfrac{3}{2l}$; для B_1 — $\rho = l$, $d^2 = \dfrac{4l^2}{3}$, $\psi_2' = \dfrac{3}{4l}$. Тогда $\gamma' = \frac{1}{2}(\psi_1' + \psi_2') = \dfrac{9}{8l}$ и

$$E_z^{\text{бок}\prime} = \frac{A}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2l}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{8l} = \frac{9\sqrt{3}}{32}\,\frac{A}{\varepsilon_0 l^2}.$$



Сдвиг заряда из F в G на ζ (для наглядности сильно увеличен). Углы ψ_1, ψ_2 — между осью z (вниз) и направлениями на концы T_1, B_1 образующей; штриховые лучи из G повёрнуты, $\gamma = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)$ отходит от 90°, и у поля появляется осевая составляющая. В F: $\psi_1 = 120°$, $\psi_2 = 60°$.

7. Основания. Нижний слой создаёт поле вверх, верхний — вниз: $E_z^{\text{осн}} = \dfrac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}(\Omega_1 - \Omega_2)$, где $y_1 = z - z_1$, $y_2 = z_2 - z$ и $\dfrac{d\Omega}{dy} = -\dfrac{2\pi R^2}{(y^2+R^2)^{3/2}}$. Так как $dy_1/dz = 1$, $dy_2/dz = -1$,

$$E_z^{\text{осн}\prime} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\left[\frac{R_1^2}{(y_1^2+R_1^2)^{3/2}} + \frac{R_2^2}{(y_2^2+R_2^2)^{3/2}}\right].$$

В F: $R_1 = \frac{l}{2}$, $y_1 = \frac{l}{2\sqrt{3}}$, $y_1^2 + R_1^2 = \frac{l^2}{3}$; $R_2 = l$, $y_2 = \frac{l}{\sqrt{3}}$, $y_2^2 + R_2^2 = \frac{4l^2}{3}$.

Слагаемые равны $\dfrac{3\sqrt{3}}{4l}$ и $\dfrac{3\sqrt{3}}{8l}$:

$$E_z^{\text{осн}\prime} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{8l} = -\frac{9\sqrt{3}}{16}\,\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 l}.$$

8. Устойчивость и период. Складываем: $E_z' = \dfrac{9\sqrt{3}}{32\,\varepsilon_0 l^2}(A - 2\sigma_0 l)$. Уравнение малых колебаний:

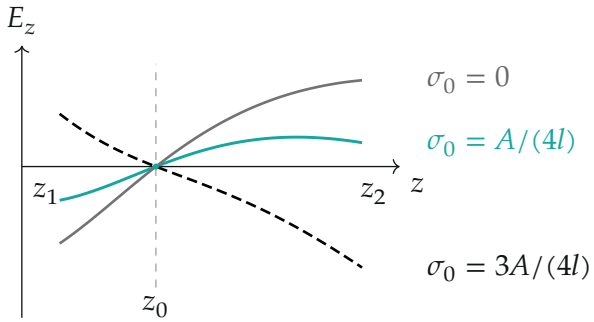
$$\ddot{\zeta} + \frac{9\sqrt{3}}{32}\,\frac{q}{m\varepsilon_0 l}\Big(\frac{A}{l} - 2\sigma_0\Big)\zeta = 0.$$

Равновесие устойчиво, когда коэффициент при ζ положителен:

$$\sigma_0 < \frac{A}{2l}.$$

Тогда колебания гармонические, и период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{8\pi}{3}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{m\varepsilon_0 l}{q}\Big(\frac{A}{l} - 2\sigma_0\Big)^{-1}}.$$



Осевое поле E_z в канале в единицах $A/(\varepsilon_0 l)$ (численно; z в единицах l). Серая линия — одна боковая поверхность. В $z_0 = 2l/\sqrt{3}$ все кривые проходят через

нуль: при $\sigma_0 < A/(2l)$ поле растёт (на заряд $-q$ действует возвращающая сила), при $\sigma_0 > A/(2l)$ убывает.

Обратите внимание: заряд отрицательный, поэтому сила равна $-qE_z$ и устойчивость означает $E_z' > 0$, а не < 0.

Проверка. Размерность: $A/l - 2\sigma_0$ — Кл/м^2, как σ_0, и $\omega^2 \sim q\sigma/(m\varepsilon_0 l)$ имеет размерность с$^{-2}$. При $\sigma_0 \to A/(2l)$ период $T \to \infty$ — граница устойчивости. Знак: боковая поверхность притягивает отрицательный заряд и удерживает его около F, а положительные основания тянут его к себе и расшатывают равновесие, как две притягивающие пластины. Численно (центральная разность, python) $E_z^{\text{бок}\prime} = 0{,}4871\,A/(\varepsilon_0 l^2)$ и $E_z^{\text{осн}\prime} = -0{,}9743\,\sigma_0/(\varepsilon_0 l)$ — это $9\sqrt{3}/32$ и $9\sqrt{3}/16$.

Смысл: положение равновесия задаёт одна геометрия трапеции и не зависит от σ_0; от σ_0 зависит только жёсткость.

Ответ. 1) $E_{\text{O}} = \dfrac{\sqrt{3}}{16}\dfrac{A}{\varepsilon_0 l}$, вектор направлен вдоль оси конуса от усечённого конуса через вершину O; 2) $OF = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}l$ (точка пересечения диагоналей осевого сечения); 3) устойчиво при $\sigma_0 < \dfrac{A}{2l}$, период $T = \dfrac{8\pi}{3}\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{m\varepsilon_0 l}{q}\left(\dfrac{A}{l} - 2\sigma_0\right)^{-1}}$.