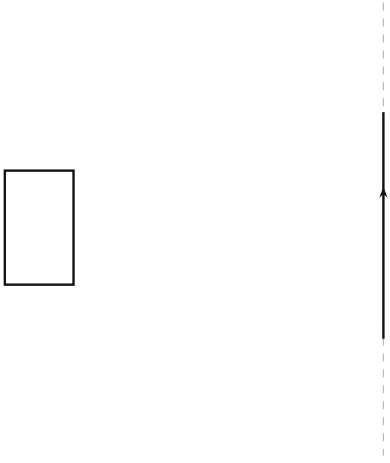
Рамка и провод

Задача 4. [ВсОШ 2023/24, 11 класс, задача 4] Жёсткая прямоугольная рамка, изготовленная из тонкой проволоки, может двигаться по гладкой горизонтальной поверхности, на которой закреплён тонкий бесконечно длинный прямолинейный провод. На рисунке показан вид сверху на данную систему. Изначально силы токов в проводе и в рамке равны нулю. Рамка покоится в таком положении, что одна из пар её сторон параллельна проводу, причём расстояние между проводом и ближайшей к нему стороной рамки во много раз превышает все размеры рамки. Силу тока в проводе увеличивают до некоторого максимального значения настолько быстро, что смещением рамки за время увеличения силы тока можно пренебречь. В дальнейшем силу тока в проводе поддерживают постоянной. Оказалось, что в момент достижения силой тока в проводе максимального значения скорость рамки равнялась v_0. Индуктивностью рамки можно пренебречь, а её сопротивление можно считать постоянным. Чему будет равна скорость рамки v_1 спустя очень большое время после достижения силой тока в проводе максимального значения?



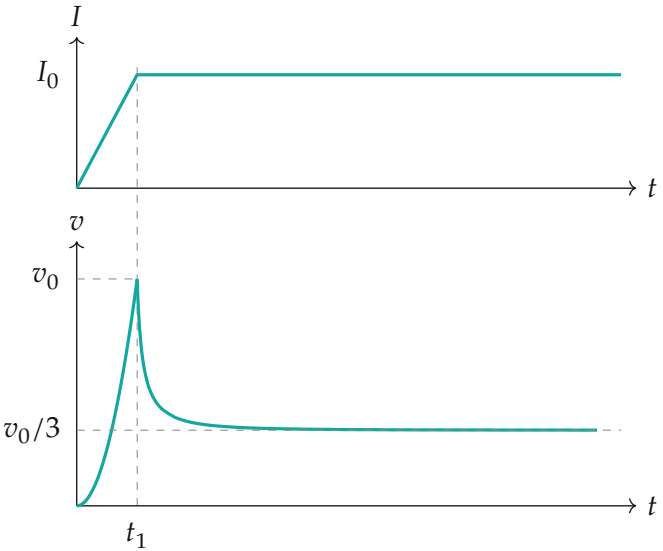
▲ **Решение.** **Что происходит.** Класс задачи — индукция: ЭДС → ток в цепи → механика. Ток в проводе меняется, меняется поток его поля

через рамку, в рамке возникают ЭДС и ток, а на этот ток в неоднородном поле провода действует сила Ампера. Картина по стадиям такая.

Стадия 1: ток в проводе растёт. Поток через рамку растёт, и по правилу Ленца рамка отталкивается от провода; смещения за это время нет, но рамка набирает скорость v_0.

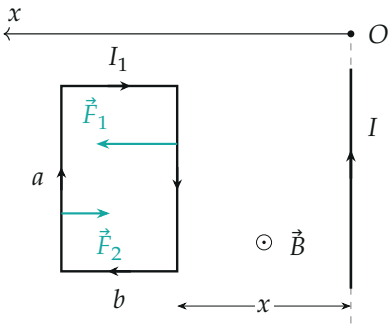
Стадия 2: ток постоянен. Рамка движется от провода, поток через неё убывает, ток в рамке меняет направление, и сила Ампера притягивает рамку к проводу — тормозит. Тормозящая сила пропорциональна скорости рамки и быстро убывает с расстоянием (как $1/x^4$), поэтому рамка не успевает остановиться: скорость падает только до некоторого $v_1 > 0$.

Главная идея — записать второй закон Ньютона для малого промежутка dt, $m\,dv = F\,dt$, и выразить $F\,dt$ через изменение потока $d\Phi$; тогда обе стадии считаются одной формулой.

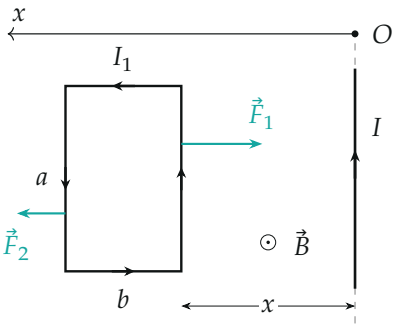


Качественная картина (по времени вне масштаба в стадии 1). Ток I быстро растёт до I_0 за время t_1; скорость рамки за это время растёт от нуля до v_0 при почти неизменном x, потом убывает от v_0 до $v_0/3$. Кривая после t_1 рассчитана по формуле для $v(x)$ из пункта 7 и $dt = dx/v$ (время в единицах x_0/v_0).

Обозначения. a — сторона рамки, параллельная проводу, b — перпендикулярная. x — расстояние от провода до ближайшей стороны рамки, x_0 — его начальное значение. Ось Ox направлена по поверхности от провода к рамке. I — ток в проводе (I_0 — наибольший), I_1 — ток в рамке, положительный, если он идёт против часовой стрелки при виде сверху. R — сопротивление рамки, m — её масса, Φ — поток через рамку, v — проекция скорости рамки на ось Ox. Поле провода у рамки направлено на читателя, так как рамка слева от провода, а ток идёт вверх.



а) ток в проводе растёт



б) ток в проводе постоянен

Вид сверху. Провод с током I (вверх), рамка со сторонами a, b на расстоянии x; поле провода $\vec{B}$ направлено на нас. а) Ток в проводе растёт, поток растёт, ток в рамке I_1 идёт по часовой стрелке; сила на ближнюю к проводу сторону $\vec{F}_1$ больше, чем на дальнюю $\vec{F}_2$, равнодействующая направлена от провода. б) Ток постоянен, рамка уходит, поток убывает, I_1 идёт против часовой; равнодействующая направлена к проводу. Силы на стороны b взаимно уравновешены. Стрелки смещены по вертикали, чтобы не лежать на одной линии.

1. Поток через рамку. Расстояние x от провода во много раз больше a и b, поэтому поле на всей площади рамки считаем однородным: $B(x) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$. Тогда

$$\Phi = B(x)\, ab = k\,\frac{I}{x}, \qquad k = \frac{\mu_0 ab}{2\pi}.$$

Через $\Phi(I, x)$ выразятся и ЭДС, и сила.

2. Ток в рамке. По закону электромагнитной индукции Фарадея ЭДС в рамке $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$ (положительное направление — против часовой стрелки, нормаль на читателя). Индуктивностью пренебрегаем, поэтому по закону Ома для рамки

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}.$$

3. Сила Ампера. На две стороны b действуют равные по модулю и противоположные силы (токи в них идут навстречу друг другу, поле на них одно и то же), и они взаимно уравновешены. На стороны a действуют силы, направленные вдоль оси Ox: на ближнюю — $I_1 aB(x)$ к проводу, на дальнюю — $I_1 aB(x+b)$ от провода (при $I_1 > 0$). Равнодействующая в проекции на Ox

$$F_x = I_1 a\big[B(x+b) - B(x)\big] \approx I_1 ab\,\frac{dB}{dx} = I_1\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{kI}{x^2}.$$

Здесь $\partial\Phi/\partial x$ — скорость изменения потока при смещении рамки на единицу длины при неизменном токе провода.

4. Импульс силы через изменение потока. Умножим второй закон Ньютона на dt и подставим I_1 из пункта 2:

$$m\,dv = F_x\,dt = I_1\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,dt = -\frac{1}{R}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,d\Phi.$$

Обратите внимание: так записано для любого процесса — меняются ли ток в проводе, расстояние x или то и другое. Здесь $d\Phi$ — изменение потока за dt, и интеграл берут по процессу, а не по времени: зависимость $x(t)$ мы не знаем.

5. Стадия 1: рост тока. Рамка за это время не смещается, $x = x_0$, поэтому $d\Phi = k\,dI/x_0$, а $\partial\Phi/\partial x = -kI/x_0^2$:

$$m\,dv = \frac{k^2}{Rx_0^3}\,I\,dI.$$

Просуммируем от $I = 0$, $v = 0$ до $I = I_0$, $v = v_0$:

$$mv_0 = \frac{k^2}{Rx_0^3}\int_0^{I_0} I\,dI = \frac{k^2 I_0^2}{2Rx_0^3}. \qquad (1)$$

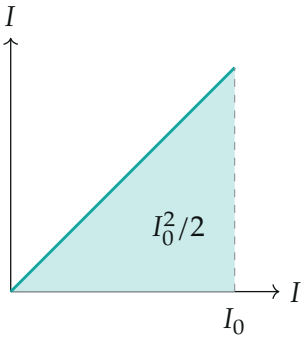
Ток в рамке в это время отрицателен (по часовой стрелке), и сила $F_x = I_1\,\partial\Phi/\partial x > 0$ направлена от провода — как и должно быть по правилу Ленца.

6. Стадия 2: ток постоянен. Теперь $I = I_0$, поток зависит только от x: $\Phi = kI_0/x$, $d\Phi = -kI_0\,dx/x^2$, $\partial\Phi/\partial x = -kI_0/x^2$. Подставим:

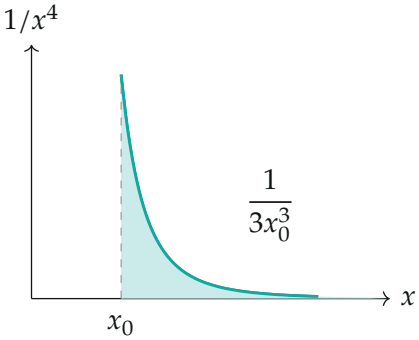
$$m\,dv = -\frac{k^2 I_0^2}{R}\,\frac{dx}{x^4}.$$

(Сила пропорциональна скорости: $F_x = -\dfrac{k^2 I_0^2}{Rx^4}\,v$, потому что $dx = v\,dt$. Поэтому и удобно складывать импульсы по пути.) Просуммируем от начального положения x_0 со скоростью v_0 до очень большого времени. К тому моменту рамка далеко от провода ($x \to \infty$), если она не останавливается; проверим это ниже. Так как $\displaystyle\int_{x_0}^{\infty}\frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3x_0^3}$,

$$m(v_1 - v_0) = -\frac{k^2 I_0^2}{R}\cdot\frac{1}{3x_0^3}. \qquad (2)$$



а) стадия 1: $\int I\,dI$



б) стадия 2: $\int_{x_0}^{\infty} dx/x^4$

Две суммы, из которых получается ответ. а) Стадия 1: $\int_0^{I_0} I\,dI = I_0^2/2$ — площадь треугольника. б) Стадия 2: $\int_{x_0}^{\infty} dx/x^4 = 1/(3x_0^3)$ — площадь под убывающей кривой.

7. Ответ. Из (1): $\dfrac{k^2 I_0^2}{R x_0^3} = 2mv_0$. Подставим в (2):

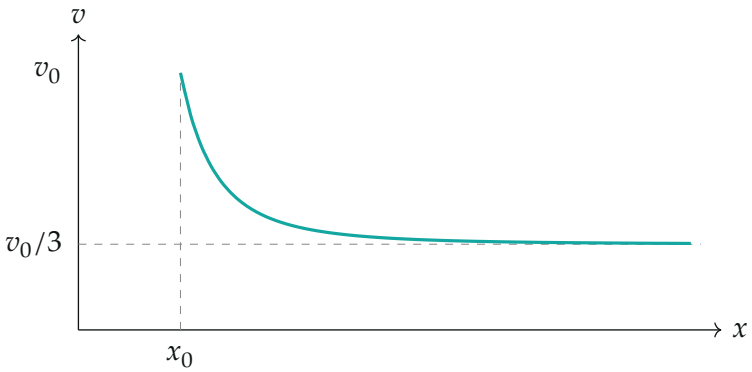
$$m(v_1 - v_0) = -\frac{2mv_0}{3} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \frac{v_0}{3}.$$

Рамка за всё время потеряла две трети импульса: $\dfrac{1/3}{1/2} = \dfrac{2}{3}$ — отношение двух площадей на рисунке.

Остаётся проверить допущение, что рамка уходит на бесконечность. Тот же интеграл от x_0 до произвольного x даёт скорость на расстоянии x:

$$v(x) = \frac{v_0}{3} + \frac{2v_0}{3}\left(\frac{x_0}{x}\right)^3.$$

Она убывает с ростом x, остаётся положительной и стремится к $v_0/3$. Значит, рамка не останавливается и $x \to \infty$ — предположение верно. (Если бы по формуле (2) получилось $v_1 < 0$, рамка остановилась бы на конечном расстоянии.)



Скорость рамки как функция расстояния после стадии 1: $v(x) = v_0/3 + (2v_0/3)(x_0/x)^3$. Кривая монотонно убывает и никогда не достигает нуля, асимптота — $v_0/3$.

Проверка. Размерность: kI_0/x_0 — поток Φ (Вб), $\Phi^2/(Rx_0) = \text{В}^2\text{с}^2/(\text{Ом}\cdot\text{м}) = \text{Дж}\cdot\text{с}/\text{м} = \text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}$ — импульс mv_0, как в (1). Ответ не зависит ни от a, b, R, m, I_0, x_0, а только от двух чисел $1/2$ и $1/3$. Численно (python, уравнение движения интегрировалось при плавном нарастании тока за время $\tau = 0{,}001\,x_0/v_0$) скорость в конце нарастания $0{,}999\,v_0$, рамка за это время сместилась на $0{,}0003\,x_0$, а к $t = 200\,x_0/v_0$ скорость равна $0{,}333\,v_0$.

Смысл: толчок в стадии 1 всегда сильнее торможения в стадии 2: площади относятся как $1/2$ к $1/3$, потому что тормозящая сила быстро убывает с расстоянием, и рамка уносит с собой треть набранной скорости.

Ответ. $v_1 = \dfrac{v_0}{3}$.