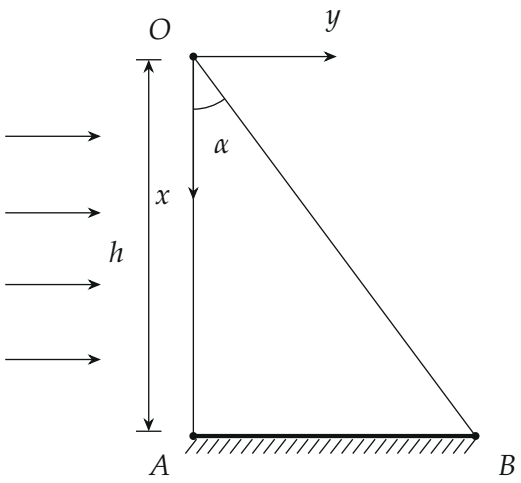
Неоднородность в призме

Задача 5. [ВсОШ 2023/24, 11 класс, задача 5] Экспериментатор Глюк проводит оптические исследования со сплошной призмой, поперечное сечение OAB которой представляет собой прямоугольный треугольник с катетами AB и $OA = h$. Все грани призмы либо параллельны, либо перпендикулярны плоскости рисунка. Если ввести прямоугольную систему координат xOy с началом в точке O так, как показано на рисунке, то показатель преломления материала призмы зависит только от координаты x по закону:

$$n(x) = \frac{3}{2 - x/h}.$$



Глюк решил целиком осветить грань призмы, содержащую OA и перпендикулярную плоскости рисунка, перпендикулярным ей пучком света. Дно призмы, содержащее AB и перпендикулярное плоскости рисунка, покрыто веществом, полностью поглощающим попавший на неё свет. Призма расположена в воздухе, показатель преломления которого можно считать равным единице. Далее рассматривайте только лучи, попадающие внутрь призмы через точки, расположенные на стороне OA призмы.

1. Рассмотрим луч, попадающий в призму в точке с координатой x_0. Найдите уравнение траектории данного луча внутри призмы до попадания на стороны AB и OB призмы. Значения x, при которых полученное уравнение траектории является применимым, находить не обязательно.
2. При каких значениях угла $\angle AOB = \alpha$ лучи света попадают во все точки стороны OB сечения призмы?
3. При каких значениях угла α все лучи, достигнувшие стороны OB сечения призмы, преломляются и проходят в воздух?

▲ **Решение. Что происходит.** Показатель преломления зависит только от x: призма — слоистая среда с горизонтальными слоями $x = \text{const}$. Для неё есть сохраняющаяся величина: на границе каждого слоя $n \sin\theta$ не меняется (θ — угол луча с нормалью к слоям, то есть с осью x). Луч входит в призму вдоль оси y по нормали к грани OA, не преломляясь, а дальше n растёт с x, и луч загибается вниз, к основанию. Оказывается, что траектория — дуга окружности, и у всех лучей центр в одной точке P на оси x. Эта картина решает все три пункта: второй и третий становятся задачами о пересечении окружностей с прямой OB. Класс задачи — геометрическая оптика в неоднородной среде, а в пункте 3 ещё и полное внутреннее отражение: нужно проверить, не превышает ли $n \sin i$ единицу.

Обозначения. φ — угол между лучом и осью y (в точке входа $\varphi = 0$), $\theta = 90^\circ - \varphi$ — угол с осью x. $n_0 = n(x_0)$ — показатель на входе. $\rho = 2h - x_0$.

Пункт 1. Траектория луча.

1. Сохраняющаяся величина. Разобьём призму на тонкие горизонтальные слои с постоянными n_k. Граница слоёв перпендикулярна оси x, поэтому закон Снеллиуса на ней даёт $n_k \sin\theta_k = n_{k+1} \sin\theta_{k+1}$, а значит, вдоль всего луча

$$n(x) \sin\theta = n(x) \cos\varphi = \text{const}.$$

В точке входа $\varphi = 0$ (луч идёт по нормали к OA и не преломляется),

поэтому константа равна $n(x_0)$:

$$\frac{3\cos\varphi}{2-x/h}=\frac{3}{2-x_0/h}\quad\Longrightarrow\quad\cos\varphi=\frac{2h-x}{2h-x_0}=\frac{2h-x}{\rho}. \qquad (1)$$

Знаменатель — расстояние от точки $x=2h$ до точки входа. Это подсказывает окружность с центром в точке P ($x=2h$, $y=0$).

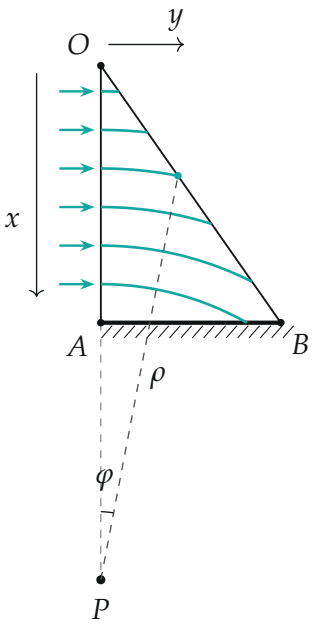
2. Дуга окружности. Из (1) получаем $x=2h-\rho\cos\varphi$. Продифференцируем: $dx=\rho\sin\varphi\,d\varphi$. Направление луча даёт $dy=dx\cot\varphi$ (так как $\tan\varphi=dx/dy$), откуда

$$dy=\rho\sin\varphi\,d\varphi\,\cot\varphi=\rho\cos\varphi\,d\varphi.$$

При $\varphi=0$ имеем $y=0$, и суммирование по φ даёт $y=\rho\sin\varphi$. Итак,

$$x-2h=-\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi\quad\Longrightarrow\quad y^2+(x-2h)^2=\rho^2.$$

Траектория — дуга окружности радиусом $\rho=2h-x_0$ с центром в точке $P(2h,\,0)$, одной и той же для всех лучей. Параметр φ оказался ещё и центральным углом: радиус из P в точку луча образует с осью Px (в сторону O) угол φ.



Лучи в призме при $\alpha = 35°$ (вычислены по формуле траектории): $x_0 = 0{,}1h$, $0{,}25h$, $0{,}4h$, $0{,}55h$, $0{,}7h$ попадают на OB, луч с $x_0 = 0{,}85h$ — на дно AB. Все дуги — части окружностей с центром P на оси x на расстоянии h ниже A. Показаны радиус $\rho = 2h - x_0$ луча с $x_0 = 0{,}4h$ и центральный угол φ.

Второй способ — через радиус кривизны. Элемент пути $dl = dx/\sin\varphi$, а радиус кривизны $R_{\text{кр}} = \dfrac{dl}{d\varphi} = \dfrac{1}{\sin\varphi}\dfrac{dx}{d\varphi} = -\dfrac{dx}{d(\cos\varphi)}$. Из (1) $\cos\varphi = (2h - x)/\rho$, поэтому $d(\cos\varphi) = -dx/\rho$ и $R_{\text{кр}} = \rho = \text{const}$: траектория — дуга окружности радиусом ρ. Луч стартует вдоль оси y, поэтому центр кривизны лежит на нормали к лучу в точке входа — на оси x ниже неё на расстоянии ρ: $x_P = x_0 + \rho = 2h$, $y_P = 0$ — тот же центр.

Уравнение траектории:

$$y^2 + (x - 2h)^2 = (2h - x_0)^2,$$

пока луч не дошёл до сторон AB или OB.

Проверка. Радиус кривизны луча, идущего поперёк градиента показа-

теля, равен $n/(dn/dx)$. В точке входа $n/n' = 2h - x_0$ — то же ρ. Радиус уменьшается с ростом x_0: чем глубже вход, тем больше градиент n и тем круче загибается луч. Размерность: все слагаемые уравнения — квадраты длины.

Пункт 2. Освещённость стороны OB.

3. Что нужно найти. Луч с радиусом ρ попадает на OB в точке T, для которой $PT = \rho$, и это *первое* пересечение дуги с OB. Лучи имеют $x_0 \in [0, h]$, то есть $\rho \in [h, 2h]$. Точка T на OB на расстоянии s от O имеет координаты $x = s\cos\alpha$, $y = s\sin\alpha$, и расстояние до P:

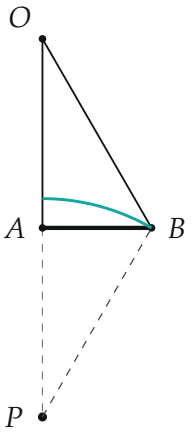
$$PT^2 = (2h - s\cos\alpha)^2 + s^2\sin^2\alpha = 4h^2 - 4hs\cos\alpha + s^2.$$

Когда s растёт от 0 (там $PT = 2h$), PT убывает, пока $s < 2h\cos\alpha$, а при $s = 2h\cos\alpha$ достигает наименьшего значения $2h\sin\alpha$ — это основание F перпендикуляра, опущенного из P на OB (окружность радиуса $2h\sin\alpha$ касается OB в точке F). Дальше PT снова растёт.

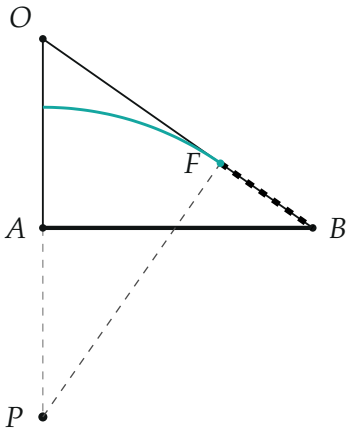
4. Два случая. Длина $OB = h/\cos\alpha$. Основание перпендикуляра F лежит на отрезке OB, если $2h\cos\alpha < h/\cos\alpha$, то есть при $\cos^2\alpha < \frac{1}{2}$, $\alpha > 45°$.

$\alpha \le 45°$. На всём отрезке OB расстояние PT убывает от $2h$ в точке O до $PB = h/\cos\alpha \ge h$ в точке B. Каждой точке T отвечает ровно одна окружность с $\rho = PT \in [h, 2h]$, то есть один луч с $x_0 = 2h - PT \in [0, h]$. Этот луч приходит в T по пути, где x растёт и не больше h, поэтому до дна не доходит. Значит, освещены все точки OB.

$\alpha > 45°$. Точка F лежит на OB. Окружность с ρ между $2h\sin\alpha$ и $2h$ пересекает OB в двух точках по обе стороны от F, но луч приходит с той стороны, где O, и останавливается на первой. Точки отрезка FB не освещены ни одним лучом.



а) $\alpha < 45°$



б) $\alpha > 45°$

а) $\alpha = 30°$: луч, приходящий в B (радиус $PB = OB$), — последний; все точки OB освещены. б) $\alpha = 55°$: окружность радиусом $2h\sin\alpha$ касается OB в точке F (основание перпендикуляра из P); отрезок FB (жирный пунктир) лучи не достигают.

Тот же результат — из геометрии равнобедренного треугольника OPB: $OB = PB = h/\cos\alpha$ (так как $PB^2 = h^2 + h^2\tan^2\alpha$), поэтому $\angle OPB = \angle POB = \alpha$ и $\angle PBO = 180° - 2\alpha$. Радиус PB перпендикулярен касательной к лучу, поэтому луч приходит в B под острым углом к OB при $\angle PBO > 90°$, то есть $\alpha < 45°$; при $\alpha = 45°$ луч касается OB в B. Условие

$$\alpha \le 45°.$$

Проверка (численно, python: лучи из 150 точек входа прослежены по лучевому уравнению). При $\alpha = 30°$ лучи доходят практически до B (самая дальняя достигнутая точка — $1{,}15h$ при $OB = 1{,}155h$), при $\alpha = 60°$ освещён только участок до F (около $0{,}9h$ при предсказанных $2h\cos 60° = h$; у касания лучи на сетке редки).

Пункт 3. Выход в воздух.

5. Что нужно найти. Луч выходит в воздух через OB, если $n\sin i \le 1$ (i — угол падения на OB, $n = n(x_T)$ — показатель в точке падения): иначе полное внутреннее отражение. Заметим: в пункте 2 при $\alpha \le 45°$ лучи приходят на всю OB; нужно проверить $n\sin i \le 1$ в каждой точке

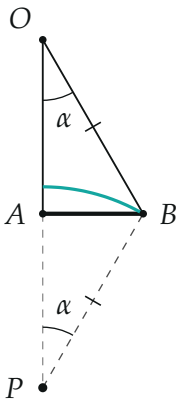
T.

6. Угол падения. Луч перпендикулярен радиусу PT (касательная к окружности), а нормаль к OB перпендикулярна самой OB. Поэтому угол падения i равен углу между прямыми PT и OB, то есть углу $\angle PTO$ треугольника POT. По теореме синусов в $\triangle POT$ ($PO = 2h$, $PT = \rho$, $\angle POT = \alpha$):

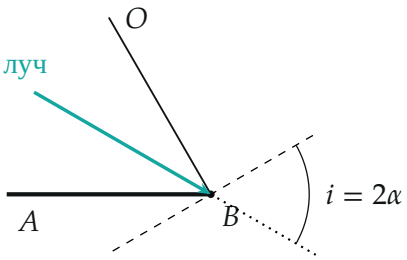
$$\sin i = \frac{2h \sin \alpha}{\rho}.$$

Показатель в точке T: $n = \dfrac{3h}{2h - x}$, $x = s \cos \alpha$. Подставим $\rho^2 = (2h - x)^2 + x^2 \tan^2 \alpha$ (из PT^2 при $s = x / \cos \alpha$):

$$n \sin i = \frac{6h^2 \sin \alpha}{(2h - x)\sqrt{(2h - x)^2 + x^2 \tan^2 \alpha}}.$$



а)



б) окрестность B

Луч, приходящий в B ($\alpha = 30°$). а) Равнобедренный треугольник OPB: $OB = PB$ (засечки), углы при O и P равны α, угол $\angle PBO = 180° - 2\alpha$. б) Окрестность B в увеличенном виде: луч перпендикулярен радиусу PB, нормаль (штрих) перпендикулярна OB, поэтому угол падения i между лучом (точечное продолжение) и нормалью равен углу между PB и OB, то есть 2α.

7. Где $n\sin i$ наибольшее. Числитель постоянен. Знаменатель убывает с ростом x при $\alpha < 45°$: множитель $(2h - x)$ убывает, а производная подкоренного выражения $-2(2h - x) + 2x\tan^2\alpha < 0$, так как $x < 2h\cos^2\alpha$ ($x \le h$ и $\cos^2\alpha > \frac{1}{2}$). Значит, $n\sin i$ растёт вдоль OB от O к B, наибольшее значение — в точке B ($x = h$):

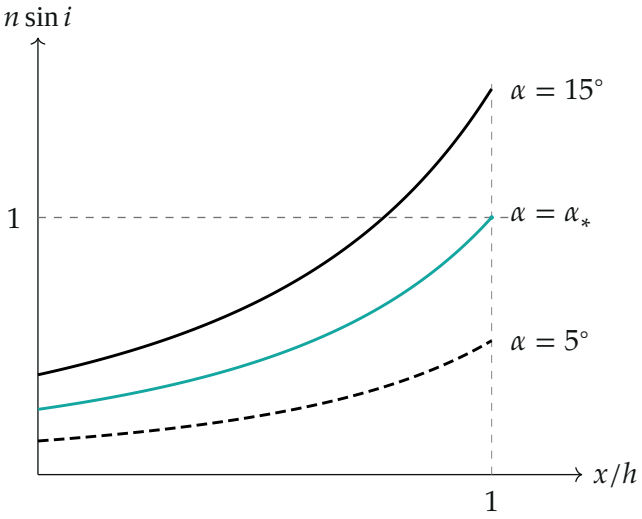
$$(n\sin i)_{\max} = \frac{6h^2\sin\alpha}{h\cdot h/\cos\alpha} = 6\sin\alpha\cos\alpha = 3\sin 2\alpha.$$

Это совпадает с прямым расчётом в B: $n(h) = 3$ и $i = 2\alpha$ (рисунок).

8. Условие. Все лучи выходят, если $3\sin 2\alpha \le 1$:

$$\alpha \le \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} \approx 9{,}74°.$$

Так как $9{,}74° < 45°$, условие пункта 2 выполняется автоматически, и лучи действительно приходят во все точки OB.



Величина $n\sin i$ вдоль OB (x — координата точки падения) для трёх углов α ($\alpha_* = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}$). Рост от O к B; при α_* в точке B значение равно 1 — граница полного отражения; при $\alpha = 15°$ у B превышает 1, лучи у B отражаются полностью.

Обратите внимание: полное внутреннее отражение проверяют в *каждой* точке падения, а не только в какой-то одной, потому что и n, и угол падения меняются вдоль OB; наихудшая точка — B благодаря монотонности из пункта 7.

Проверка: размерность — все величины безразмерны. Для $\alpha = \alpha_*$: $\sin 2\alpha_* = 1/3$, $3\sin 2\alpha_* = 1$. Численный расчёт лучей (python): при $\alpha = 9{,}74^\circ$ наибольшее $n\sin i$ вдоль OB по 150 лучам равно $0{,}995$ (при точном значении $1{,}000$ в самой B), при $\alpha = 30^\circ$ — $2{,}58$ против $3\sin 60^\circ = 2{,}60$.

Смысл: показатель растёт к дну, свет прижимается к дну, и чем больше угол призмы, тем круче лучи подходят к OB и тем легче им испытать полное отражение — поэтому нужен малый угол.

Ответ. 1) $y^2 + (x - 2h)^2 = (2h - x_0)^2$ — дуга окружности с центром в точке $x = 2h$, $y = 0$; 2) $\alpha \leqslant 45^\circ$; 3) $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3} \approx 9{,}74^\circ$.