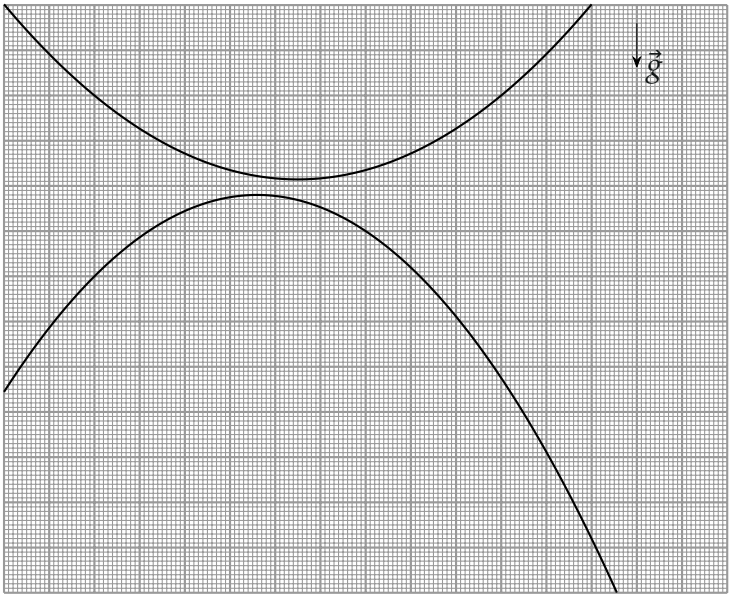
Ускоряющее зеркало

Задача 1. [ВсОШ 2023/24, 9 класс, задача 1] «Ускоряющее зеркало». Экспериментатор Глюк держит в руках точечный источник света S, расположенный под горизонтальным плоским зеркалом, движущемся поступательно с постоянным вертикальным ускорением. Глюк бросил источник света под углом к горизонту и стал производить съёмку с помощью специальной видеокамеры. Проанализировав видеофрагмент в покадровом режиме, Глюк построил на листе масштабно-координатной бумаги участки траекторий источника света S и его изображения в зеркале S^*.



Пользуясь приведённым рисунком, определите величину и направление ускорения $\vec{a}$ зеркала.

Ускорение свободного падения $g = 9{,}80$ м/с^2. Сопротивлением воздуха можно пренебречь, скорость света считайте бесконечной.

В бланках для оформления решений приведён рисунок с траекториями источника и изображения в увеличенном масштабе. Необходимые построения выполняйте на этом листе-бланке.

Обратите внимание, что методы нахождения величин, необходимых для решения, будут оцениваться в соответствии с точностью предложенного метода.

▲ **Решение. Что происходит.** Источник летит как брошенное тело: по параболе «вершиной вверх» с ускорением $\vec{g}$ — это нижняя кривая. Изображение в плоском зеркале симметрично источнику относительно зеркала, поэтому его движение — тоже парабола, но «вершиной вниз», с каким-то другим ускорением $\vec{a}^*$ — это верхняя кривая. Главная идея: перейти в систему отсчёта зеркала, где изображение — просто зеркальная копия источника, найти $\vec{a}^*$ через $\vec{a}$, а потом сравнить по графику, насколько круче изогнуты две параболы. Время на графике не отмечено, но оно и не нужно: у источника и изображения одинаковая горизонтальная скорость, и равные горизонтальные смещения означают равные промежутки времени.

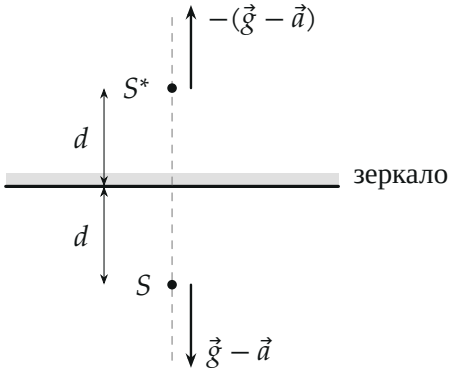
Обозначения. Ось x — горизонтально вправо, ось y — вертикально вверх. Единица длины на графике — сторона мелкой клетки («клетка»). v_x — горизонтальная скорость источника, $\vec{a}^*$ — ускорение изображения относительно земли, a_y и a_y^* — их проекции на ось y. V и V^* — вершины парабол источника и изображения.

1. Изображение в системе отсчёта зеркала. Перейдём в систему отсчёта зеркала. Зачем: в ней зеркало неподвижно, и изображение строится по обычному правилу — симметрично источнику относительно плоскости зеркала. Зеркало движется поступательно с ускорением $\vec{a}$, поэтому по закону сложения ускорений ускорение источника относительно зеркала

$$\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{g} - \vec{a}.$$

Изображение находится на том же расстоянии d от зеркала, что и источник, но по другую сторону. Горизонтальные координаты у них всегда одинаковы, вертикальные расстояния до зеркала — противоположны. Ускорения $\vec{g}$ и $\vec{a}$ вертикальны, поэтому ускорение изображения относительно зеркала — противоположный вектор:

$$\vec{a}^*_{\text{отн}} = -\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{a} - \vec{g}.$$



Система отсчёта зеркала: изображение S^* симметрично источнику S, их ускорения относительно зеркала противоположны.

2. Ускорение изображения относительно земли. Возвращаемся в систему отсчёта земли, снова по закону сложения ускорений:

$$\vec{a}^* = \vec{a} + \vec{a}^*_{\text{отн}} = 2\vec{a} - \vec{g}, \qquad a^*_y = 2a_y + g.$$

Здесь учтено, что $g_y = -g$. Отсюда искомая проекция

$$a_y = \frac{a^*_y - g}{2}.$$

Горизонтальная скорость изображения тоже v_x: оно всё время на одной вертикали с источником (зеркало горизонтально), а v_x источника постоянна — по горизонтали на него ничего не действует. Изображение, как и источник, движется с постоянным ускорением, поэтому его траектория — парабола. Неизвестным осталось только a^*_y; его даёт график.

3. Чтение графика: равные Δx — равные времена. От вершины параболы, где вертикальная скорость равна нулю, отложим одно и то же горизонтальное смещение Δx у обеих кривых. Время движения на этом участке у источника и у изображения одинаковое,

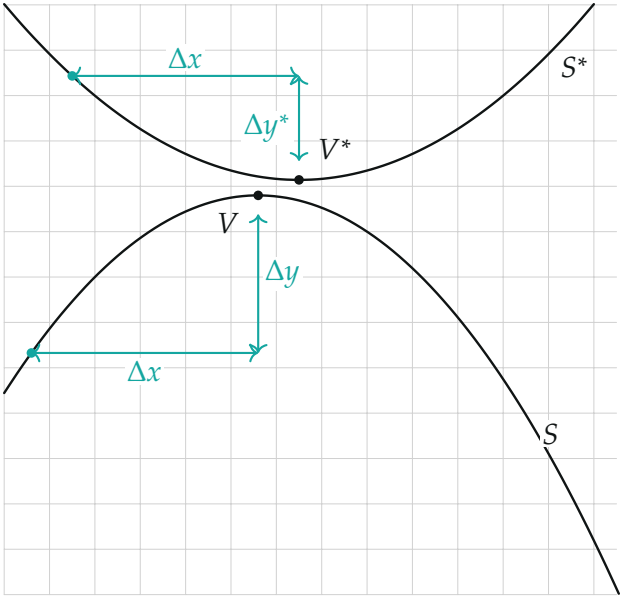
$$t = \frac{\Delta x}{v_x},$$

а вертикальные смещения от вершины — как при движении из состоя-

ния с нулевой вертикальной скоростью:

$$\Delta y = \frac{gt^2}{2}, \qquad \Delta y^* = \frac{a_y^* t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_y^*}{g} = \frac{\Delta y^*}{\Delta y}.$$

Знаменатель v_x сократился: время в явном виде не понадобилось. Знак тоже виден сразу: верхняя кривая изогнута вверх, значит, $a_y^* > 0$.



Вершины парабол V и V^* и одинаковое горизонтальное смещение $\Delta x = 50$ клеток от каждой вершины; крупная клетка — 10 мелких.

Вершины найдём, как в построении на бланке: проведём горизонтальную хорду каждой параболы, её середина лежит на оси симметрии параболы. Получаем $V(56;\, 88{,}0)$ и $V^*(65;\, 91{,}4)$ в клетках от левого нижнего угла сетки. Чтобы точность была наибольшей, Δx берём максимальным, какое позволяют обе кривые: $\Delta x = 50$ клеток (влево до $x = 6$ и до $x = 15$). По графику

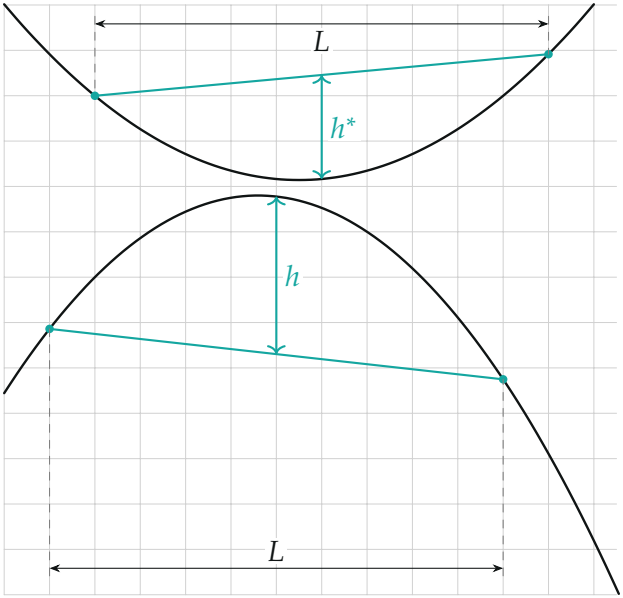
$$\Delta y = 34{,}7, \qquad \Delta y^* = 22{,}9 \text{ клетки}, \qquad \frac{a_y^*}{g} = \frac{22{,}9}{34{,}7} = 0{,}660.$$

Каждое значение читается с точностью около 0,3 клетки, поэтому отношение известно с точностью около 0,015.

4. Второй способ: прогиб хорды. Вершину изображения прочесть труднее всего: парабола там плоская. Обойдёмся без вершин. У параболы $y = y_0 + \frac{k}{2}(x - x_0)^2$ прогиб — расстояние по вертикали от середины хорды до кривой — для хорды с горизонтальной проекцией L равен

$$h = \frac{kL^2}{8}$$

и не зависит от того, где взята хорда. Здесь $k = g/v_x^2$ у источника и $k^* = a_y^*/v_x^2$ у изображения, поэтому при одинаковой L отношение прогибов снова равно a_y^*/g. Возьмём $L = 100$ клеток: хорда источника от $x = 10$ до $x = 110$, хорда изображения от $x = 20$ до $x = 120$. По графику $h = 34{,}7$ клетки, $h^* = 22{,}9$ клетки — то же отношение 0,660.



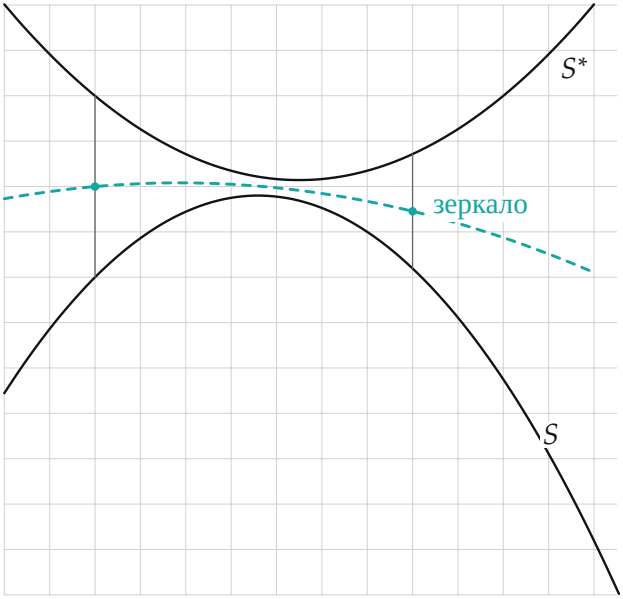
Хорды с одинаковой горизонтальной проекцией $L = 100$ клеток и их прогибы h и h^*.

5. Ускорение зеркала. Подставляем в пункт 2:

$$a_y = \frac{a_y^* - g}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{\Delta y^*}{\Delta y} - 1\right) = \frac{9{,}80}{2}\,(0{,}660 - 1) \approx -1{,}67\ \text{м/с}^2.$$

Проекция отрицательна: зеркало движется с ускорением, направленным вертикально вниз. Погрешность отношения 0,015 даёт погрешность a около $\frac{g}{2} \cdot 0{,}015 \approx 0{,}07$ м/с^2.

6. Наглядная проверка: траектория самого зеркала. Точка зеркала, лежащая на одной вертикали с источником, в каждый момент находится посередине между S и S^*. Отметив середины вертикальных отрезков между кривыми, получаем траекторию этой точки — параболу «вершиной вверх». Значит, ускорение зеркала действительно направлено вниз; её прогиб на той же хорде L — полусумма прогибов кривых с учётом знака, $(34{,}7 - 22{,}9)/2 = 5{,}9$ клетки, то есть $a/g = 5{,}9/34{,}7 = 0{,}170$, как и выше.



Штриховая линия — середины вертикальных отрезков между S и S: так движется точка зеркала.*

Обратите внимание: изображение движется не с ускорением $-\vec{g}$, как можно подумать по «зеркальной» картинке, а с ускорением $2\vec{a} - \vec{g}$. Симметрия есть только в системе отсчёта зеркала.

Ответ. $a = \dfrac{g}{2}\left(1 - \dfrac{\Delta y^*}{\Delta y}\right) \approx 1{,}7$ м/с^2 (по графику $1{,}67 \pm 0{,}07$ м/с^2), ускорение зеркала направлено вертикально вниз.

Проверка. Размерность: $\Delta y^*/\Delta y$ безразмерно, $[a] = [g]$. Пределы: неподвижное зеркало ($a = 0$) — изображение падает «вверх» с ускорением g, кривые одинаково изогнуты, $\Delta y^* = \Delta y$; зеркало падает свободно ($\vec{a} = \vec{g}$) — $\vec{a}^* = \vec{g}$, обе кривые изогнуты вниз одинаково. У нас кривые изогнуты в разные стороны, а верхняя слабее нижней — значит, $0 < a < g/2$ и направлено вниз, что и получилось. Третий способ (пункт 6) дал то же число.

Смысл: зеркало «догоняет» падающий источник, поэтому относительно зеркала источник падает медленнее, $g - a$, а изображение «всплывает» относительно земли с ускорением $g - 2a$.

Ответ. $a = \dfrac{g}{2}\left(1 - \dfrac{\Delta y^*}{\Delta y}\right) \approx 1{,}7$ м/с^2 ($1{,}67 \pm 0{,}07$ м/с^2), ускорение зеркала направлено вертикально вниз.