Мощная задача

Задача 2. [ВсОШ 2023/24, 9 класс, задача 2] «Мощная задача».

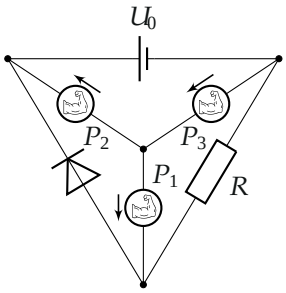


Рис. 1

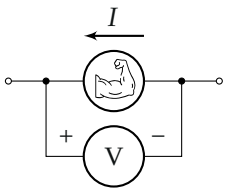


Рис. 2

Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке 1, состоит из идеального источника постоянного напряжения $U_0 = 12$ В, резистора, идеального диода (напряжение открытия которого равно нулю) и трёх приборов, далее именуемых «источники постоянной мощности».

Обозначим за I силу электрического тока, протекающего через прибор. Принцип работы источника постоянной мощности таков:

1. при $I = 1$ А $= I_в$, прибор работает как источник постоянной силы тока $I_в = 1$ А, выдавая мощность не больше номинальной.
2. Прибор пропускает ток только в направлении, указанном стрелкой возле его обозначения на схеме. Сила тока не превосходит $I_в$.
3. При $I \leqslant 1$ мА прибор работает как источник постоянного напряжения, выдавая мощность не больше номинальной и создавая напряжение, равное $P/I_н$, где P — номинальная мощность прибора, а $I_н = 1$ мА.
4. При $I_н < I < I_в$ мощность, выдаваемая прибором, постоянна и равна номинальной.
5. Под номинальной мощностью прибора понимается $P = IU_V$, где показания вольтметра $U_V > 0$ (см. рисунок 2). **Обратите внимание на полярность подключения вольтметра!**

Номинальные мощности каждого источника: $P_1 = 1$ Вт, $P_2 = 2$ Вт и $P_3 = 3$ Вт.

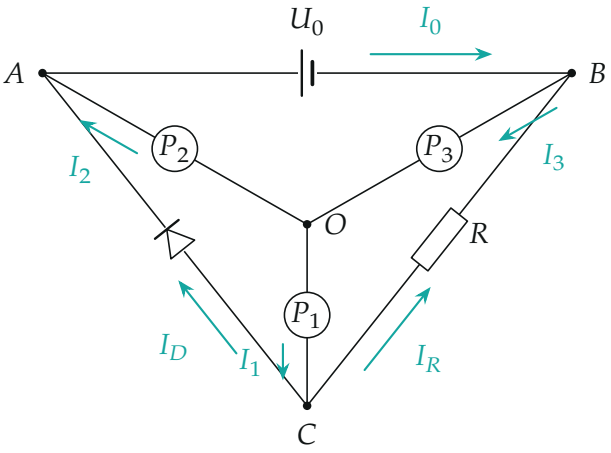
Найдите значения сил токов, текущих во всех ветвях цепи, и сопротивление R резистора. Известно, что через резистор протекает ток силой $I_R = 0{,}8$ А.

При решении используйте следующие обозначения:

- I_i — сила электрического тока, протекающего через прибор P_i;
- I_D — через диод;
- I_0 — через источник постоянного напряжения;
- I_R — через резистор.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача с нелинейными элементами: у диода два состояния, у каждого прибора — три режима. Класс задачи — перебор состояний: предполагаем состояние диода, пишем правило узлов и сумму напряжений по контуру, проверяем, не нарушено ли какое-нибудь ограничение (ток прибора не больше 1 А, ток диода только в разрешённую сторону). Ровно одно предположение пройдёт проверку. Главное — правильно понять, как прибор меняет потенциал: по рисунку 2 ток I входит в прибор с вывода «−» и выходит с вывода «+», то есть прибор, как батарейка, *поднимает* потенциал по направлению своего тока на $U = P/I$.

Обозначения. Узлы: A и B — верхние, O — центральный, C — нижний. Длинная пластина источника U_0 — плюс, она у узла A: $\varphi_A - \varphi_B = U_0$. Разрешённые направления токов (по стрелкам у приборов): P_2 — от O к A, P_3 — от B к O, P_1 — от O к C; диод пропускает ток от C к A. $U_i = \varphi_{\text{вых}} - \varphi_{\text{вх}}$ — напряжение прибора P_i. Потенциал узла B примем за ноль.



Узлы схемы и разрешённые направления токов.

1. Предположим, что диод открыт. Тогда $\varphi_C = \varphi_A$. Приборы P_1 и P_2 оба начинаются в узле O и кончаются в узлах с одинаковым потенциалом, значит, их напряжения равны: $U_1 = U_2 = U$.

Пусть сначала все три прибора выдают номинальную мощность (другие режимы разберём в конце пункта). Тогда

$$I_1 = \frac{P_1}{U}, \qquad I_2 = \frac{P_2}{U} = 2I_1.$$

Правило узлов для O и напряжение прибора P_3:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 3I_1, \qquad U_3 = \frac{P_3}{I_3} = \frac{3}{3I_1} = U.$$

Сумма напряжений по контуру $B \to O \to A$ (через P_3 и P_2) равна разности потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$:

$$U_3 + U_2 = U_0 \quad \Rightarrow \quad U = \frac{U_0}{2} = 6\ \text{В}, \qquad I_1 = \frac{1}{6}\ \text{А}.$$

Правило узлов для C: в узел входит ток I_1, выходят ток диода I_D (к A) и

ток резистора I_R (к B: $\varphi_C = \varphi_A = 12$ В $> \varphi_B$):

$$I_D = I_1 - I_R = \frac{1}{6} - 0{,}8 < 0.$$

Ток через диод получился в запрещённую сторону — противоречие. Режим «источник тока» его не спасает: правило узлов для C требует $I_1 \geq I_R = 0{,}8$ А, тогда $I_2 \leq 1 - I_1 \leq 0{,}2$ А, $U_2 = P_2/I_2 \geq 10$ В, и мощность P_1 была бы $U_1 I_1 = U_2 I_1 \geq 8$ Вт > 1 Вт. Режим малого тока ($I \leq 1$ мА) невозможен для P_1 при $I_1 \geq 0{,}8$ А. Значит, **диод закрыт**.

2. Диод закрыт: токи. Тогда $I_D = 0$, и весь ток прибора P_1 уходит через резистор (правило узлов для C):

$$I_1 = I_R = 0{,}8 \text{ А}.$$

Правило узлов для O: $I_3 = I_1 + I_2 = I_2 + 0{,}8$ А. Сумма напряжений по контуру $B \to O \to A$:

$$U_3 + U_2 = U_0.$$

Ток I_2 не меньше 1 мА: иначе одно $U_2 = P_2/I_{\text{н}} = 2000$ В уже больше U_0. Пусть оба прибора P_2 и P_3 выдают номинальную мощность:

$$\frac{P_2}{I_2} + \frac{P_3}{I_2 + I_R} = U_0 \quad \Rightarrow \quad 12 I_2^2 + 4{,}6\, I_2 - 1{,}6 = 0, \quad I_2 \approx 0{,}221 \text{ А}.$$

Но тогда $I_3 = I_2 + 0{,}8 \approx 1{,}02$ А > 1 А — больше предельного тока. Значит, P_3 работает как источник тока:

$$I_3 = I_{\text{в}} = 1 \text{ А}, \qquad I_2 = I_3 - I_1 = 0{,}2 \text{ А}.$$

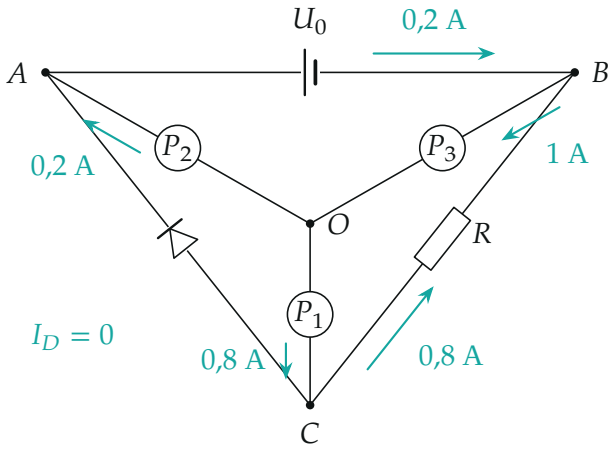
Проверим, что режимы согласованы. P_2 при 0,2 А выдаёт номинальную мощность: $U_2 = P_2/I_2 = 10$ В. Тогда $U_3 = U_0 - U_2 = 2$ В, мощность P_3 равна $U_3 I_3 = 2$ Вт ≤ 3 Вт — как и положено в режиме источника тока.

Ток источника U_0 — правило узлов для A: в узел входит I_2 (диод за-

крыт), он весь уходит через источник к B:

$$I_0 = I_2 = 0{,}2\ \text{А}$$

(внутри источника ток течёт от плюса к минусу: источник U_0 здесь не отдаёт, а принимает энергию).



Токи в цепи при закрытом диоде.

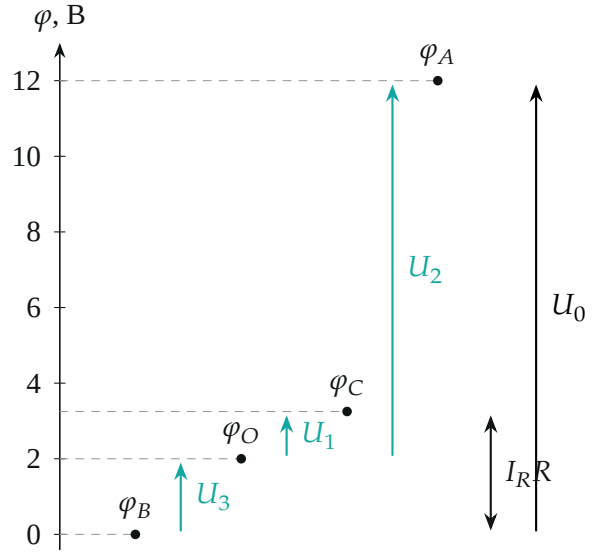
3. Сопротивление резистора. Пройдём от B к C двумя путями. По пути $B \to O \to C$ через приборы P_3 и P_1 потенциал поднимается дважды:

$$\varphi_C = \varphi_B + U_3 + U_1, \qquad U_1 = \frac{P_1}{I_1} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25\ \text{В}, \qquad \varphi_C = 3{,}25\ \text{В}.$$

По резистору ток I_R течёт от C к B, по закону Ома $\varphi_C - \varphi_B = I_R R$:

$$R = \frac{U_3 + U_1}{I_R} = \frac{(U_0 - P_2/I_2) + P_1/I_R}{I_R} = \frac{2 + 1{,}25}{0{,}8} \approx 4{,}1\ \text{Ом}.$$

4. Проверка: диод действительно закрыт. Диод пропускает ток от C к A, для этого нужно $\varphi_C \geq \varphi_A$. У нас $\varphi_C = 3{,}25$ В, $\varphi_A = 12$ В: на диоде обратное напряжение 8,75 В, он заперт. Предположение непротиворечиво.



Потенциалы узлов при закрытом диоде ($\varphi_B = 0$): каждый прибор поднимает потенциал по своему току.

Обратите внимание: напряжение прибора — не падение, а подъём потенциала по току (вольтметр подключён плюсом к выходу тока). Если перепутать знак, получится $R < 0$ или $R \approx 0{,}94$ Ом.

Проверка. Размерность: $[R] = \text{В/А} = \text{Ом}$. Баланс мощности: приборы отдают $P_1 + P_2 + U_3 I_3 = 1 + 2 + 2 = 5$ Вт; резистор потребляет $I_R^2 R = 0{,}64 \cdot 4{,}06 = 2{,}6$ Вт, источник U_0 потребляет $U_0 I_0 = 2{,}4$ Вт; сумма 5,0 Вт — сходится.

Смысл: из двух приборов на одной «линии» $B \to O \to A$ один упирается в предельный ток, и тогда его напряжение подстраивается под цепь, а не задаётся мощностью.

Ответ. Диод закрыт: $I_D = 0$, $I_1 = I_R = 0{,}8$ А, $I_2 = 0{,}2$ А, $I_3 = 1$ А, $I_0 = 0{,}2$ А; $R = \dfrac{U_0 - P_2/I_2 + P_1/I_R}{I_R} \approx 4{,}1$ Ом.