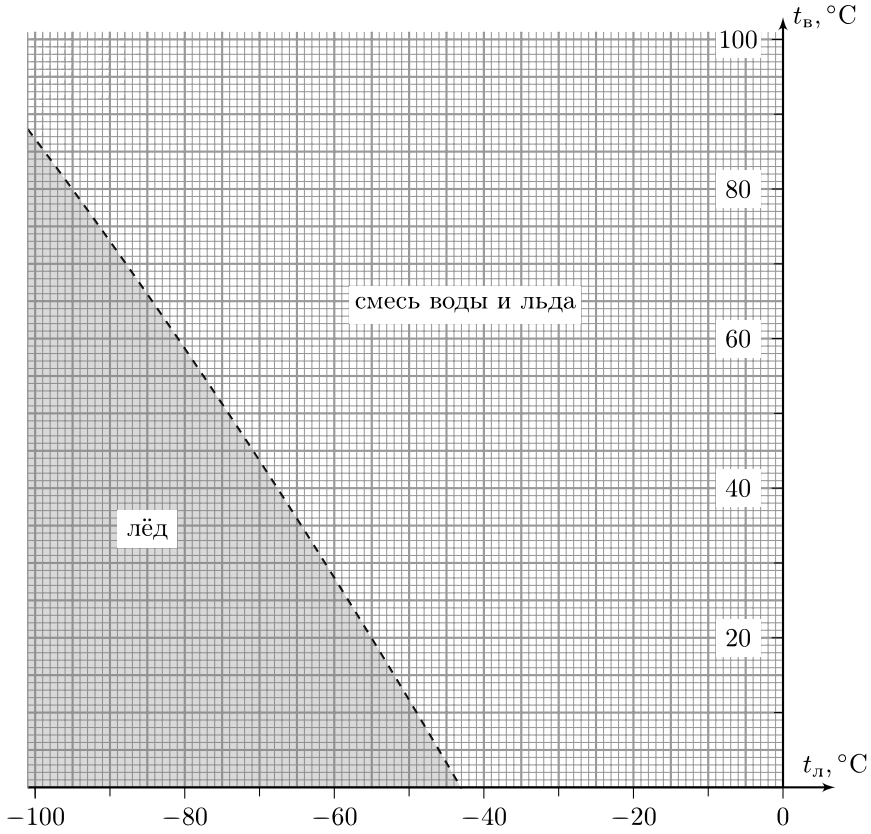
Нелинейная картина

Задача 3. [ВсОШ 2023/24, 9 класс, задача 3] «Нелинейная картина». В сосуд кладут кусок льда массой $m_л$ и заливают порцией воды массой $m_в$. На диаграмме показаны области с указанием конечного состояния содержимого сосуда в зависимости от температуры куска льда $t_л \in [-100\,°C; 0\,°C]$ и температуры порции воды $t_в \in [0\,°C; 100\,°C]$.



Известно, что в диапазоне $[-100\,°C; 0\,°C]$ удельная теплоёмкость льда зависит от его температуры по закону: $c_л(t_л) = c + \alpha t_л$, где $c = 2100$ Дж/(кг · °C), $t_л$ — температура льда в градусах Цельсия, а α — некоторая постоянная величина. Удельная теплоёмкость воды

$2c = 4200$ Дж/(кг · °C), а удельная теплота плавления $\lambda = 336$ кДж/кг $= 2cT$, где $T = 80\,°\text{C}$. Теплоёмкостью сосуда и тепловыми потерями пренебречь.

1. Определите α и $\gamma = m_л/m_в$.
2. Качественно начертите аналогичную диаграмму конечного состояния содержимого сосуда в зависимости от температуры куска льда $t_л \in [-100\,°\text{C}; 0\,°\text{C}]$ и температуры порции воды $t_в \in [0\,°\text{C}; 100\,°\text{C}]$, но при равных массах льда и воды $m_л = m_в$. Укажите на диаграмме характерные точки.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на уравнение теплового баланса с фазовым переходом. Конечное состояние — лёд, смесь воды и льда при 0 °C или вода. Граница между областями диаграммы — это пограничный случай, когда всё содержимое при 0 °C и *целиком* в одной фазе: на границе «лёд/смесь» вода как раз вся замёрзла, на границе «смесь/вода» лёд как раз весь растаял. Для пограничного случая записываем тепловой баланс — и получаем уравнение линии. Новое здесь одно: теплоёмкость льда зависит от температуры, поэтому теплоту на нагрев льда считаем через площадь под графиком $c_л(t)$.

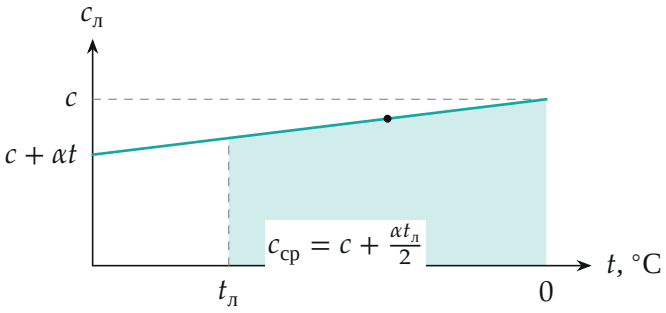
Обозначения. $\gamma = m_л/m_в$; $c_{ср}$ — средняя удельная теплоёмкость льда на участке от $t_л$ до 0 °C. Температуры в градусах Цельсия, $t_л \le 0$.

Пункт 1.

1. Теплота на нагрев льда. Нагреем лёд массой $m_л$ на малую величину dt; на это нужна теплота $dQ = c_л(t)\, m_л\, dt$. Суммируя от $t_л$ до 0, получаем $m_л$, умноженную на площадь под графиком $c_л(t)$. График — прямая, площадь — трапеция:

$$Q_л = m_л \frac{c + (c + \alpha t_л)}{2} (0 - t_л) = -m_л \left(c + \frac{\alpha t_л}{2} \right) t_л.$$

Значит, лёд нагревается так, как если бы его теплоёмкость была постоянной и равной среднему $c_{ср} = c + \alpha t_л/2$.



Теплоёмкость льда растёт линейно; площадь трапеции, умноженная на $m_л$, — теплота на нагрев льда от $t_л$ до 0 °C.

2. Уравнение пунктирной линии. На пунктирной линии конечное состояние — лёд при 0 °C, только что замёрзший целиком. Вода остыла до 0 °C и вся кристаллизовалась, отдав

$$Q_в = 2c\,m_в t_в + \lambda m_в = 2c\,m_в(t_в + T).$$

Теплообмен только между льдом и водой, потерь нет — уравнение теплового баланса $Q_в = Q_л$. Делим на $2c\,m_в$:

$$t_в = -T - \frac{\gamma t_л}{2} - \frac{\alpha\gamma}{4c}\,t_л^2. \qquad (1)$$

Левее и ниже этой линии воды слишком мало тепла, чтобы прогреть лёд до нуля, — остаётся лёд; правее — смесь.

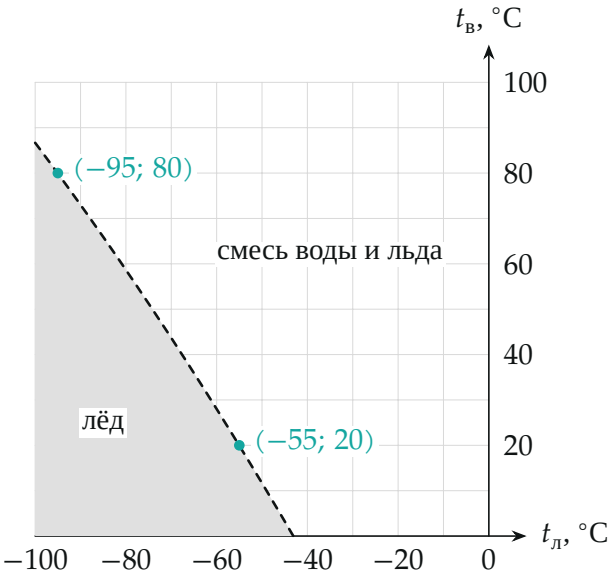
3. Две точки с графика. Неизвестных в (1) два: γ и комбинация $\alpha\gamma$. Выберем на пунктирной линии точки, где она проходит точно через узлы сетки: $(-95;\,80)$ и $(-55;\,20)$. Обозначим $b = \alpha\gamma/(4c)$:

$$\begin{cases} 80 = -80 + 47{,}5\,\gamma - 9025\,b, \\ 20 = -80 + 27{,}5\,\gamma - 3025\,b. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 3 и вычтем из первого: $160 - 300 = (47{,}5 - 82{,}5)\gamma$, то есть $\gamma = 4{,}0$. Тогда $b = (27{,}5 \cdot 4 - 100)/3025 =$

$1/302{,}5 \approx 1/300$ и

$$\alpha = \frac{4cb}{\gamma} = \frac{4 \cdot 2100}{4 \cdot 300} = 7{,}0\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot (^\circ\text{C})^2}.$$



Линия (1) при $\gamma = 4$, $\alpha = 7$ Дж/(кг·(°C)^2), построенная по формуле, и две опорные точки — совпадает с пунктиром условия.

4. Второй способ: наклон линии. Возьмём лёд холоднее на малую величину $dt_л$. Чтобы по-прежнему всё замёрзло ровно до 0 °C, воду нужно взять теплее на $dt_в$, причём лишняя теплота воды уходит на лишний нагрев льда: $2c\, m_в\, dt_в = c_л(t_л)\, m_л\, dt_л$. Наклон линии по модулю

$$k = \frac{dt_в}{dt_л} = \frac{\gamma}{2}\left(1 + \frac{\alpha}{c}\, t_л\right).$$

У нижнего конца линии ($t_л \approx -43$) наклон по графику около 1,71, у верхнего ($t_л = -100$) — около 1,33. Из этих двух чисел: $k(-43)/k(-100) = 1{,}29$, откуда $\alpha/c = 1/300$, $\alpha = 7{,}0$, и $\gamma = 2k(-100)/(1 - 1/3) = 4{,}0$ — то же самое. Это же видно из (1) дифференцированием.

Обратите внимание: линия выгнута, потому что теплоёмкость холодного льда меньше. При постоянной теплоёмкости ($\alpha = 0$) граница была бы прямой.

Пункт 2. Теперь $\gamma = 1$, $\alpha\gamma/(4c) = 7/8400 = 1/1200$.

5. Есть ли область «лёд»? Линия (1) при $\gamma = 1$: $t_в = -80 - t_л/2 - t_л^2/1200$. При $t_л \geq -100$ имеем $-t_л/2 \leq 50 < 80$, поэтому $t_в < 0$ на всём диапазоне: линия ниже диаграммы. Даже вода при 0 °C, замерзая, отдаёт $\lambda m = 2cTm$ — больше, чем нужно, чтобы нагреть такой же массы лёд от −100 °C до нуля. Чистого льда в конце не бывает.

6. Граница «смесь/вода». На ней конечное состояние — вода при 0 °C, лёд только что весь растаял. Вода отдала $2c\,m_в t_в$, лёд получил на нагрев и плавление $-m_л(c + \alpha t_л/2)t_л + \lambda m_л$. Уравнение теплового баланса, делённое на $2cm_в$:

$$t_в = \gamma T - \frac{\gamma t_л}{2} - \frac{\alpha\gamma}{4c}\,t_л^2 \quad \xrightarrow{\gamma=1} \quad t_в = 80 - \frac{t_л}{2} - \frac{t_л^2}{1200}. \qquad (2)$$

(В пункте 1 при $\gamma = 4$ эта линия начиналась бы с $t_в = 320$ °C, поэтому области «вода» там не было.) Характерные точки: при $t_л = 0$ получаем $t_в = 80$ °C; пересечение с $t_в = 100$ °C:

$$t_л^2 + 600\,t_л + 24000 = 0, \qquad t_л = -300 + \sqrt{66000} \approx -43\ °\text{C}$$

(второй корень, −557 °C, вне диапазона). Выше линии (2) — вода, ниже — смесь воды и льда.

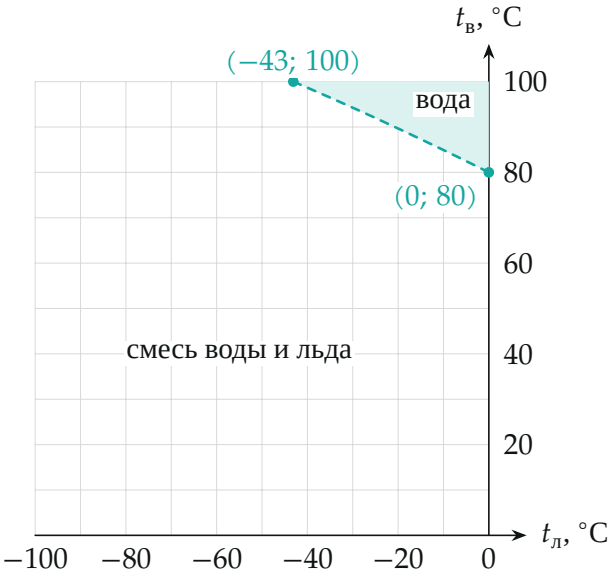


Диаграмма при $m_л = m_в$: линия (2) по точкам формулы, характерные точки (0; 80) и (−43; 100).

Проверка. Размерность: $[\alpha t^2/c] = \frac{\text{Дж/(кг·°C}^2)\cdot\text{°C}^2}{\text{Дж/(кг·°C)}} = $ °C — как у $t_в$. Точка (0; 80): лёд при 0 °C тает целиком, если равная масса воды остывает от $T = \lambda/(2c) = 80$ °C — верно. Теплоёмкость льда при −100 °C: 2100 − 700 = 1400 Дж/(кг·°C), она положительна — закон $c_л(t)$ разумен на всём диапазоне.

Ответ. 1) $\gamma = 4{,}0$, $\alpha = 7{,}0$ Дж/(кг·(°C)^2); 2) области «лёд» нет; выше линии $t_в = 80 - t_л/2 - t_л^2/1200$, проходящей через точки (0 °C; 80 °C) и (−43 °C; 100 °C), — вода, ниже — смесь воды и льда.