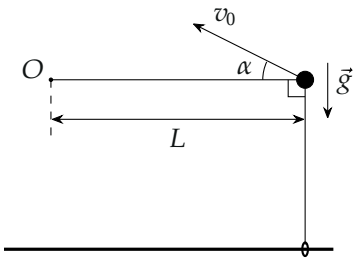
А когда не натянута?

Задача 4. [ВсОШ 2023/24, 9 класс, задача 4] «А когда не натянута?».



Маленькое невесомое колечко может скользить без трения по длинной горизонтальной закреплённой спице. Один конец невесомой нерастяжимой нити прикреплён к кольцу, а другой закреплён в неподвижной точке O (см. рисунок). По нити без трения может перемещаться массивная бусинка. Изначально нить слегка натянута, при этом бусинка находится на одной горизонтали с точкой O и на одной вертикали с колечком. Длина горизонтального участка нити равна L.

Бусинку толчком приводят в движение в вертикальной плоскости, содержащей нить. Сразу после толчка бусинка удаляется от спицы, а нить оказывается натянутой. Ускорение свободного падения равно g.

1. Под каким углом α к горизонту направлена скорость бусинки сразу после толчка?
2. При каких значениях начальной скорости v_0 нить будет оставаться натянутой в процессе удаления бусинки от спицы?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на связи: нить нерастяжима, значит, бусинка может двигаться только так, чтобы суммарная длина двух участков нити не менялась. Сначала поймём, как ведёт себя невесомое колечко, — отсюда следует, что нижний участок нити всегда вертикален. Тогда условие «длина нити постоянна» задаёт траекторию бусинки при натянутой нити — параболу. Свободно брошенная бусинка тоже летит по параболе; нить натянута, пока свободный полёт «хотел бы» увести бусинку за пределы, разрешённые нитью.

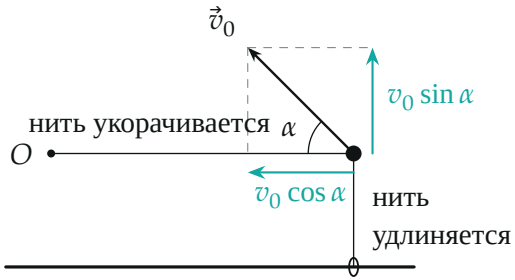
Обозначения. Начало координат — в точке O, ось x горизонтально к бусинке, ось y вертикально вверх. b — расстояние от спицы до горизонтали O; $(x; y)$ — положение бусинки; m — её масса; T — сила натяжения нити (одинакова по обе стороны бусинки: трения нет).

1. Нижний участок нити вертикален. Запишем второй закон Ньютона для колечка: масса равна нулю, значит, сумма сил на него равна нулю в любой момент. На колечко действуют сила натяжения нити (вдоль нити) и сила спицы. Трения нет, поэтому сила спицы перпендикулярна спице, то есть вертикальна. Сумма двух сил равна нулю, только если и натяжение вертикально: участок нити «бусинка–колечко» всё время вертикален. Колечко просто следует под бусинкой.

Пункт 1.

2. Скорость сразу после толчка. В первый момент нить состоит из горизонтального участка длины L и вертикального длины b. Нить нерастяжима и натянута, поэтому скорость, с которой укорачивается один участок, равна скорости удлинения другого. Скорость изменения длины участка — проекция скорости бусинки на направление этого участка. Вертикальный участок удлиняется со скоростью $v_0 \sin\alpha$ (бусинка удаляется от спицы), горизонтальный укорачивается со скоростью $v_0 \cos\alpha$ (бусинка движется к O):

$$v_0 \sin\alpha = v_0 \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = 1, \qquad \alpha = 45^\circ.$$



Сразу после толчка: на сколько удлиняется вертикальный участок, на столько укорачивается горизонтальный.

Второй способ — через длину нити. За малое время Δt бусинка смещается на $v_x\Delta t$ к O и на $v_y\Delta t$ вверх. Длина нити

$$b + v_y\Delta t + \sqrt{(L - v_x\Delta t)^2 + (v_y\Delta t)^2} \approx b + v_y\Delta t + L - v_x\Delta t$$

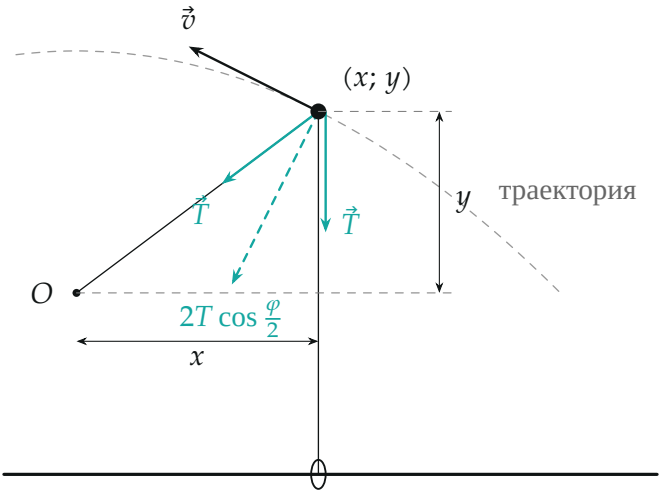
с точностью до малых второго порядка. Она равна $L+b$, поэтому $v_y = v_x$ — снова $\alpha = 45°$.

Пункт 2.

3. Траектория при натянутой нити. Бусинка в точке $(x;\, y)$. Вертикальный участок имеет длину $y+b$, наклонный — $\sqrt{x^2+y^2}$. Длина нити постоянна:

$$y + b + \sqrt{x^2+y^2} = L + b \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = (L-y)^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{L}{2} - \frac{x^2}{2L}.$$

При натянутой нити бусинка движется по параболе с вершиной $(0;\, L/2)$ над точкой O; расстояние b сократилось. Удаляться от спицы бусинка будет до этой вершины.



Бусинка на параболе: две равные силы натяжения дают равнодействующую по биссектрисе угла φ между участками нити, скорость направлена по касательной — перпендикулярно этой равнодействующей.

4. Натяжение не совершает работы. Повторим рассуждение пункта 1 для произвольной точки: скорость удлинения вертикального участка равна скорости укорачивания наклонного, то есть проекции скорости на эти два направления равны по модулю. Значит, скорость направлена по биссектрисе внешнего угла между участками нити, а равнодействующая двух равных сил натяжения — по биссектрисе внутреннего угла. Эти биссектрисы перпендикулярны: равнодействующая натяжений перпендикулярна скорости, её работа равна нулю. Закон сохранения механической энергии для бусинки:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - mgy \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 - 2gy.$$

5. Свободный полёт с той же начальной скоростью. Пусть нити нет. Бусинка брошена из точки $(L;\,0)$ под углом 45° к O: $v_x = v_y = v_0/\sqrt{2}$. Время, за которое она сместится на $L - x$ по горизонтали, $t = \sqrt{2}\,(L - x)/v_0$, и

$$y_{\text{св}} = (L - x) - \frac{g(L - x)^2}{v_0^2}.$$

При $v_0^2 = 2gL$ это $y_{\text{св}} = (L - x) - \dfrac{(L - x)^2}{2L} = \dfrac{L^2 - x^2}{2L}$ — в точности парабола пункта 3. При такой скорости бусинка летит по «нитяной» траектории сама, нить натянута с нулевой силой.

6. Когда нить натянута. Сравним свободные параболы с параболой пункта 3 (рисунок). Длина нити до бусинки, лежащей *ниже* траектории пункта 3, меньше $L + b$ — нить там провисла бы. Выше траектории бусинка оказаться не может — нить не пускает.

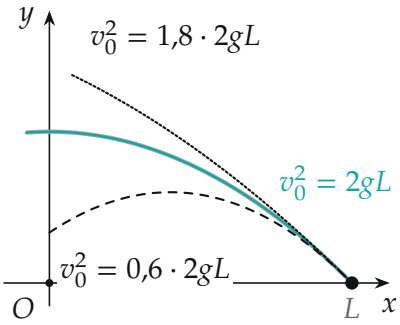
- При $v_0^2 < 2gL$ свободная парабола сразу уходит ниже: бусинке не хватает скорости, чтобы удерживать нить натянутой, нить провисает с первого же мгновения.
- При $v_0^2 > 2gL$ свободная парабола уходит выше, нить не пускает, бусинка идёт по параболе пункта 3 и нить натянута.

Проверим второе силой. Второй закон Ньютона для бусинки в проекции на нормаль к траектории: $mv^2/R = mg\cos\theta + 2T\cos\frac{\varphi}{2}$, где R — радиус

кривизны, θ — угол наклона касательной. При $v_0^2 = 2gL$ натяжение ноль на всём пути, то есть $(2gL - 2gy)/R = g\cos\theta$. При большей v_0 по пункту 4 v^2 больше на $v_0^2 - 2gL$ в каждой точке:

$$2T\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{m(v_0^2 - 2gL)}{R} \geq 0.$$

Натяжение неотрицательно во всех точках пути до вершины тогда и только тогда, когда $v_0^2 \geq 2gL$.



Серая — траектория при натянутой нити; бирюзовая — свободный полёт при $v_0^2 = 2gL$ (совпадает с ней); пунктир — меньшая скорость (провисание), точки — большая.

Обратите внимание: угол 45° в пункте 1 — не выбор, а требование нерастяжимости натянутой нити; любой другой угол при натянутой нити невозможен.

Проверка. Размерность: $\sqrt{gL}$ — м/с. Второй способ для $v_{0\,\min}$ — закон сохранения энергии: в вершине $(0;\, L/2)$ свободно летящая бусинка сохранила $v_x = v_0/\sqrt{2}$, а вертикальная скорость обнулилась: $\frac{v_0^2}{2} - \frac{v_0^2}{4} = g\frac{L}{2}$, откуда $v_0^2 = 2gL$ — вершины парабол совпадают. Смысл: нить, как и любая связь, может только тянуть; пока бусинка «рвётся» наружу параболы, нить её удерживает.

Ответ. 1) $\alpha = 45°$ (к точке O, вверх); 2) $v_0 \geq \sqrt{2gL}$.