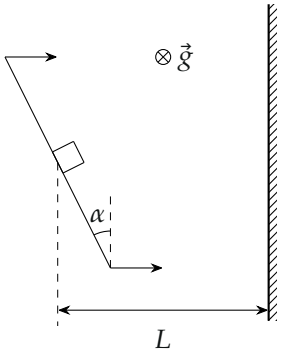
Удаление со льда

Задача 5. [ВсОШ 2023/24, 9 класс, задача 5] «Удаление со льда».



Два одинаковых небольших тяжёлых ящика покоятся на горизонтальной поверхности льда. Оба ящика находятся на одинаковом расстоянии $L = 0{,}8$ м от прямолинейного края ледяного поля. Уборщик, вооружённый длинным скребком (плоской прямоугольной пластиной с ручками), подъехал к первому ящику и прижал край скребка к одной из граней ящика. Для этого он развернул скребок так, что его край составил угол $\alpha_1 = 10°$ с краем поля. Затем он двигал скребок поступательно из состояния покоя с постоянным ускорением a, направленным перпендикулярно краю поля (см. рисунок). В результате ящик покинул поле за время $t_1 = 2$ с. Потом уборщик подъехал ко второму ящику и, действуя аналогично, вывез и его за край поля. Он снова вёз скребок поступательно с тем же ускорением, но в этот раз край скребка составлял с краем поля угол $\alpha_2 = 45°$. Известно, что коэффициент трения между льдом и обоими ящиками равен $\mu' = 1/24$, а между скребком и обоими ящиками — $\mu = 7/24$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Скребок всё время движения расположен вертикально, ящик от скребка не отрывается.

1. Определите ускорение a скребка.
2. Во сколько раз путь второго ящика до края поля был больше, чем у первого?
3. За какое время t_2 второй ящик покинет лёд?

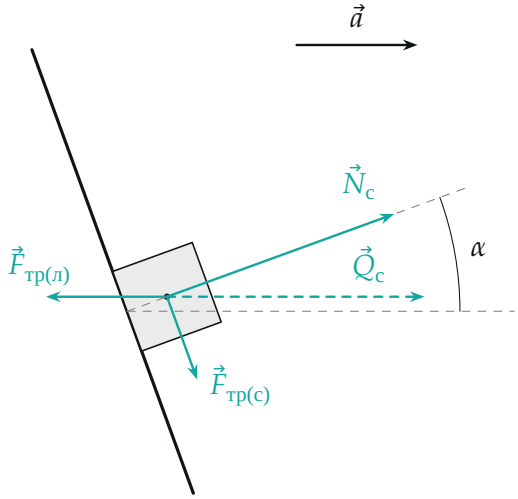
4. Во сколько раз сила трения между скребком и вторым ящиком больше, чем сила трения между скребком и первым ящиком?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача с перебором режимов трения: ящик либо едет вместе со скребком (трение покоя), либо скользит вдоль него (трение скольжения). Какой режим, решает сравнение угла наклона скребка с углом трения: удобно сложить силу нормальной реакции и силу трения скребка в одну «полную реакцию» $\vec{Q}_\text{с}$, она отклонена от нормали не больше чем на угол трения $\varphi = \operatorname{arctg}\mu$. Всё происходит в горизонтальной плоскости; вертикально сила тяжести mg уравновешена реакцией льда, поэтому трение льда $\mu' mg$ — постоянная по величине сила.

Обозначения. Вид сверху. $\vec{n}$ — нормаль к скребку в сторону ящика, она составляет с $\vec{a}$ угол α (угол скребка с краем поля). $\vec{N}_\text{с}$, $\vec{F}_{\text{тр(с)}}$ — нормальная реакция и сила трения со стороны скребка, $\vec{Q}_\text{с} = \vec{N}_\text{с} + \vec{F}_{\text{тр(с)}}$; $\vec{F}_{\text{тр(л)}}$ — трение льда, $F_{\text{тр(л)}} = \mu' mg$. $\varphi = \operatorname{arctg}\mu$: $\operatorname{tg}\varphi = 7/24$, $\cos\varphi = 24/25$, $\sin\varphi = 7/25$, $\varphi \approx 16{,}3^\circ$.

1. Режим без проскальзывания. Если ящик едет вместе со скребком, его ускорение $\vec{a}$ — вдоль оси x (к краю поля). Трение льда направлено против скорости, тоже вдоль x. Значит, по второму закону Ньютона $\vec{Q}_\text{с}$ тоже вдоль x, то есть отклонена от нормали на угол α: $F_{\text{тр(с)}} = N_\text{с} \operatorname{tg}\alpha$. Трение покоя не больше $\mu N_\text{с}$, поэтому режим возможен при

$$\operatorname{tg}\alpha \le \mu, \qquad \alpha \le \varphi.$$

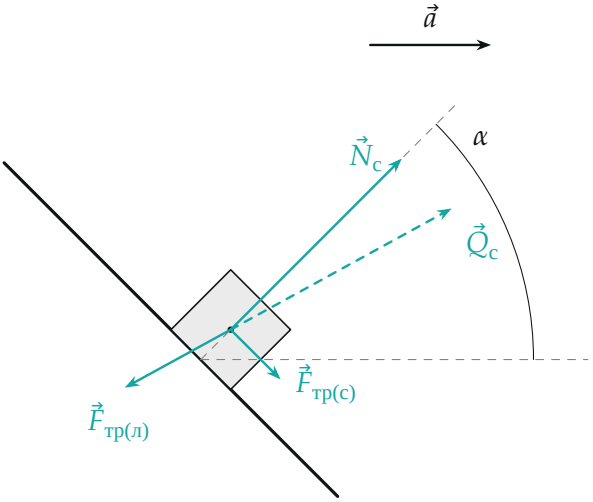


Режим 1 (вид сверху, угол увеличен для наглядности): полная реакция скребка $\vec{Q}_c$ направлена вдоль $\vec{a}$.

2. Режим скольжения. При $\alpha > \varphi$ трения покоя не хватает, ящик скользит по скребку, $F_{тр(с)} = \mu N_c$, и $\vec{Q}_c$ отклонена от нормали ровно на φ — в сторону $\vec{a}$, потому что трение мешает ящику «съезжать» вдоль скребка. Тогда $\vec{Q}_c$ составляет с $\vec{a}$ угол

$$\beta = \alpha - \varphi.$$

Ящик стартует из покоя, на него действуют две горизонтальные силы постоянного направления — $\vec{Q}_c$ и трение льда против скорости. Если ящик пошёл вдоль $\vec{Q}_c$, трение льда направлено ровно против $\vec{Q}_c$, и ящик так и движется по прямой под углом β к $\vec{a}$.



Режим 2: $\vec{Q}_c$ отклонена от нормали на угол трения φ, ящик движется вдоль $\vec{Q}_c$, трение льда — против.

3. Какой ящик в каком режиме. Первый: $\operatorname{tg} 10^\circ \approx 0{,}176 < \mu = 0{,}292$ — едет вместе со скребком. Второй: $\operatorname{tg} 45^\circ = 1 > \mu$ — скользит.

Пункт 1.

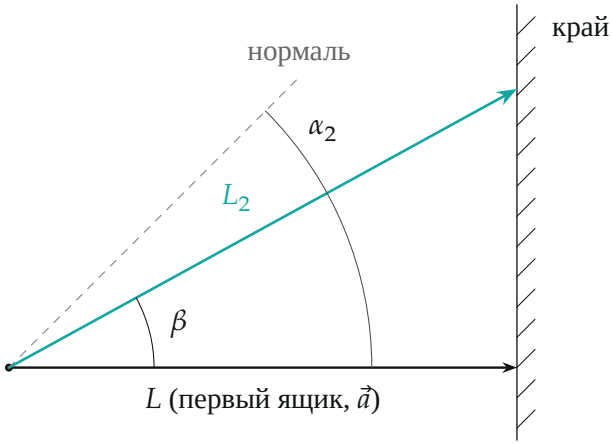
4. Ускорение скребка. Первый ящик движется вместе со скребком с ускорением a из покоя и проходит L за t_1:

$$L = \frac{at_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2L}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 0{,}8}{4} = 0{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Пункт 2.

5. Путь второго ящика. Второй ящик идёт по прямой под углом β к перпендикуляру к краю; до края по перпендикуляру L, поэтому $L_2 \cos\beta = L$:

$$\frac{L_2}{L} = \frac{1}{\cos(\alpha_2 - \varphi)} = \frac{1}{\cos 45^\circ \cos\varphi + \sin 45^\circ \sin\varphi} = \frac{25\sqrt{2}}{31} \approx 1{,}14.$$

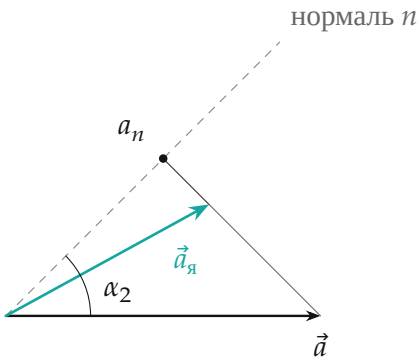


Пути ящиков до края: первый — по $\vec{a}$, второй — под углом $\beta = \alpha_2 - \varphi \approx 28{,}7°$.

Пункт 3.

6. Ускорение второго ящика. Ящик не отрывается от скребка и не вдавливается в него, поэтому их скорости, а значит, и ускорения (оба движутся поступательно) имеют одинаковую проекцию на нормаль $\vec{n}$. Ускорение скребка составляет с нормалью угол α_2, ускорение ящика — угол φ:

$$a\cos\alpha_2 = a_я\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad a_я = a\,\frac{\cos\alpha_2}{\cos\varphi} = 0{,}4\cdot\frac{0{,}707}{0{,}96} \approx 0{,}295\ \text{м/с}^2.$$



Проекции ускорений скребка $\vec{a}$ и ящика $\vec{a}_я$ на нормаль к скребку одинаковы.

7. Время. Движение из покоя с постоянным ускорением $a_я$ на пути L_2:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2L_2}{a_я}} = t_1\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha_2\cos(\alpha_2-\varphi)}} = 2\sqrt{\frac{0{,}96}{0{,}707\cdot 0{,}877}} \approx 2{,}5\text{ с}.$$

Пункт 4.

8. Трение скребка о первый ящик. Второй закон Ньютона для первого ящика в проекции на направление вдоль скребка (ось t; так не нужна $N_с$): ускорение a даёт проекцию $a\sin\alpha_1$, трение льда (против x) — проекцию $-\mu' mg\sin\alpha_1$:

$$ma\sin\alpha_1 = F_{тр(с)1} - \mu' mg\sin\alpha_1,$$

$$F_{тр(с)1} = m\sin\alpha_1\,(a+\mu' g) = 0{,}142\,m\text{ Н/кг}.$$

9. Трение скребка о второй ящик. Сила трения скольжения $F_{тр(с)2} = \mu N_с$. Второй закон Ньютона для второго ящика в проекции на нормаль $\vec{n}$ (трение скребка перпендикулярно ей и выпадает); трение льда направлено против $\vec{Q}_с$, под углом φ к нормали:

$$ma\cos\alpha_2 = N_с - \mu' mg\cos\varphi,$$

$$F_{тр(с)2} = \mu m\,(a\cos\alpha_2 + \mu' g\cos\varphi) = 0{,}199\,m\text{ Н/кг}.$$

Отношение

$$\frac{F_{тр(с)2}}{F_{тр(с)1}} = \frac{\mu\,(a\cos\alpha_2+\mu' g\cos\varphi)}{\sin\alpha_1\,(a+\mu' g)} \approx \frac{0{,}199}{0{,}142} \approx 1{,}4.$$

Обратите внимание: второй ящик движется *не* в направлении ускорения скребка, а вдоль полной реакции скребка; и из-за этого у него и путь длиннее, и ускорение меньше, чем у скребка.

Проверка. Размерности: $[a] = $ м/с^2, $[t_2] = $ с, отношения безразмерны. Второй способ для $a_я$ — второй закон Ньютона вдоль $\vec{Q}_с$: $ma_я = Q_с - \mu' mg = N_с/\cos\varphi - \mu' mg$, с $N_с/m = 0{,}683$ Н/кг из пункта 9 полу-

чаем $0{,}711 - 0{,}417 = 0{,}295$ м/с^2 — то же. Предел: при $\alpha_2 \to \varphi$ имеем $\beta \to 0$, $a_я \to a$, $t_2 \to t_1$ — граница режимов совпадает.

Ответ. 1) $a = 2L/t_1^2 = 0{,}4$ м/с^2; 2) $L_2/L = 1/\cos(\alpha_2 - \varphi) \approx 1{,}14$, $\varphi = \operatorname{arctg}\mu$; 3) $t_2 = t_1\sqrt{\cos\varphi/(\cos\alpha_2\cos(\alpha_2 - \varphi))} \approx 2{,}5$ с; 4) $\approx 1{,}4$.