Универсальный измеритель

Задача 1. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 10 класс, задача 1 (практический тур)] «Универсальный измеритель».

Оборудование. Отрезки медного и алюминиевого проводов одинаковой длины в изоляции, шарики (10 штук), трубочка для коктейля, пластилин, сосуд, вода, ножницы, скотч (по требованию), нить, лист миллиметровой бумаги; салфетки для поддержания чистоты.

1. Определите массу выданного вам металлического шарика (пульки).
2. Определите диаметр жилы (внутреннего проводника) проводов.

Снимать изоляцию с провода запрещено. Плотности меди и алюминия известны: $\rho_м = 8{,}9$ г/см^3 и $\rho_а = 2{,}7$ г/см^3, диаметры медного и алюминиевого проводников считать одинаковыми, внешний диаметр и материал изоляции на проводах одинаковые.

▲ **Решение. Что происходит.** Весов нет, зато есть вода — значит, массу измеряем законом Архимеда. Из трубочки, заткнутой снизу пластилином, получается ареометр: он плавает вертикально, и добавочная масса Δm внутри погружает его глубже на Δh. Главная идея: условие плавания для двух состояний и их разность — в разность не входят ни масса трубочки, ни пластилин, ни изоляция провода, остаётся только то, что поменяли.

Обозначения. $\rho = 1$ г/см^3 — плотность воды; d_0 — внешний диаметр трубочки, $S = \pi d_0^2/4$ — площадь её сечения; l — длина отрезков провода; d — диаметр жилы; N — число вынутых пулек; m — масса пульки.

1. Закон Архимеда для ареометра. Ареометр плавает: сила тяжести всего устройства равна силе Архимеда. Сравним два состояния, в которых масса отличается на Δm, а глубина погружения — на Δh. Сила тяжести изменилась на $\Delta m\, g$, сила Архимеда — на $\rho g S \Delta h$ (объём погружённой части трубочки изменился на $S\Delta h$):

$$\Delta m = \rho S\, \Delta h.$$

Применимость: трубочка цилиндрическая, и в обоих состояниях вода не доходит до её верха и не опускается ниже пластилиновой пробки — меняется только погружение цилиндрической части.

2. Диаметр трубочки. Обматываем трубочку нитью виток к витку (рис. 1): 10 витков имеют длину $L = 150 \pm 2$ мм, поэтому

$$d_0 = \frac{L}{10\pi} = 4{,}77 \pm 0{,}05 \text{ мм},$$

$$S = \frac{\pi d_0^2}{4} = 17{,}9 \pm 0{,}4 \text{ мм}^2, \qquad \varepsilon_S = 2\varepsilon_{d_0} \approx 0{,}02.$$

Чем больше витков, тем меньше относительная погрешность: ошибка в ± 2 мм делится на всю длину намотки.

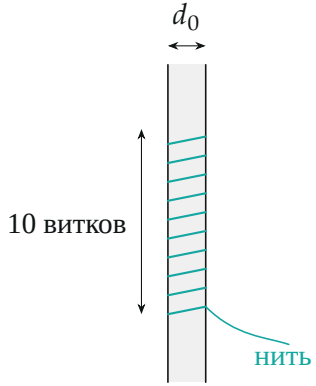

Рис. 1. Диаметр трубочки — по длине нити, намотанной в 10 витков: $L = 10\pi d_0$.

3. Пункт 1 — масса пульки. Внутрь ареометра кладём пульки, пока он почти целиком не погрузится (при длине трубочки около 18 см и пластилине около 1,5 г хватает 7 пулек). При 6 пульках отмечаем по миллиметровке на сосуде расстояние l_1 от верхнего конца трубочки до воды. Затем вынимаем пульки по одной, пока ареометр плавает устойчиво; при 2 пульках он ещё устойчив, расстояние $l_2 \approx 9{,}4$ см (рис. 2). Вынули $N = 4$ пульки, ареометр поднялся на $\Delta l = l_2 - l_1$. По формуле

шага 1

$$Nm = \rho S\,(l_2 - l_1) \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{\rho S\,(l_2 - l_1)}{N}.$$

В решении организаторов l_1 не приведено; по их итогу $\Delta l = l_2 - l_1 \approx 7{,}6$ см ($l_1 \approx 1{,}8$ см). Тогда

$$m = \frac{1\ \text{г/см}^3 \cdot 0{,}179\ \text{см}^2 \cdot 7{,}6\ \text{см}}{4} \approx 0{,}34\ \text{г}.$$

Почему вынимаем сразу 4 пульки, а не одну: погрешность отсчёта ± 2 мм одна и та же, а сдвиг в 4 раза больше — относительная погрешность в 4 раза меньше.

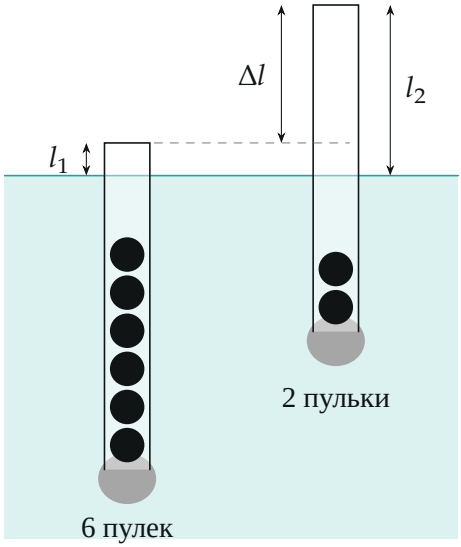

Рис. 2. Ареометр из трубочки с пластилиновой пробкой: с 6 пульками (слева) и с 2 (справа). Убрали 4 пульки — ареометр поднялся на $\Delta l = l_2 - l_1$.

4. Пункт 2 — диаметр жилы. Кладём в ареометр медный провод и подбираем пластилин так, чтобы ареометр почти полностью погружался. Затем заменяем медный провод алюминиевым той же длины (рис. 3). Изоляция у проводов одинаковая, поэтому разность масс — только разность масс жил. Отсчёты по миллиметровке: $h_\text{м} = 90 \pm 1{,}5$ мм, $h_\text{а} =$

$22 \pm 1{,}5$ мм; ареометр с алюминиевым проводом выше на

$$\Delta h = h_{\text{м}} - h_{\text{а}} = 68 \pm 3 \text{ мм}.$$

По шагу 1 разность масс проводов

$$\Delta m = \rho S\, \Delta h = 1 \text{ г/см}^3 \cdot 0{,}179 \text{ см}^2 \cdot 6{,}8 \text{ см} \approx 1{,}22 \text{ г}.$$

С другой стороны, жилы — цилиндры длины $l = 77 \pm 1$ мм и диаметра d из разных металлов:

$$\Delta m = (\rho_{\text{м}} - \rho_{\text{а}})\, \frac{\pi d^2}{4}\, l \quad \Longrightarrow \quad d = \sqrt{\frac{4\,\Delta m}{\pi(\rho_{\text{м}} - \rho_{\text{а}})\, l}} = d_0 \sqrt{\frac{\rho\, \Delta h}{(\rho_{\text{м}} - \rho_{\text{а}})\, l}}.$$

Вторая форма удобна: S сокращается. Численно

$$d = 4{,}77 \text{ мм} \cdot \sqrt{\frac{1 \cdot 68}{6{,}2 \cdot 77}} \approx 1{,}80 \text{ мм}.$$





Рис. 3. Фото организаторов: ареометр в сосуде с водой — с медным проводом (слева, погружён глубже) и с алюминиевым (справа).

5. Погрешности. Относительные погрешности произведения и частного складываем:

- масса пульки: $\varepsilon_{\Delta l} = \dfrac{2}{76} \approx 0{,}03$, $\varepsilon_m = \varepsilon_S + \varepsilon_{\Delta l} \approx 0{,}05$, $m = 0{,}34 \pm 0{,}02$ г;
- разность масс проводов: $\varepsilon_{\Delta h} = \dfrac{3}{68} \approx 0{,}044$, $\varepsilon_{\Delta m} = \varepsilon_S + \varepsilon_{\Delta h} \approx 0{,}065$, $\Delta m = 1{,}22 \pm 0{,}08$ г;
- диаметр (корень — половина погрешности): $\varepsilon_d = \frac{1}{2}\,(\varepsilon_{\Delta m} + \varepsilon_l) = \frac{1}{2}(0{,}065 + 0{,}013) \approx 0{,}04$, $d = 1{,}80 \pm 0{,}07$ мм.

6. Проверка единой калибровкой. Оба измерения — точки одной прямой $\Delta m = \rho S\,\Delta h$ (рис. 4): пульки дают точки $(N \cdot 1{,}9$ см; $N \cdot 0{,}34$ г$)$, провода — $(6{,}8$ см; $1{,}22$ г$)$. Пара проводов «весит» как 3,6 пульки.

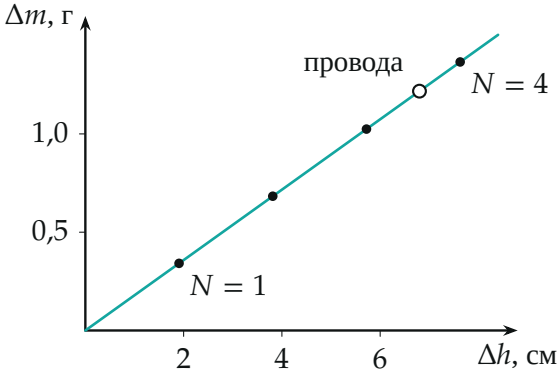

Рис. 4. Добавочная масса и сдвиг ареометра — одна прямая с наклоном $\rho S = 0{,}179$ г/см. Чёрные точки — пульки (вынуто $N = 1 \ldots 4$), светлая — замена медного провода алюминиевым.

Обратите внимание. В решении организаторов $S = 17{,}3$ мм^2 — арифметический промах: при $d_0 = 4{,}8$ мм $\pi d_0^2/4 = 18{,}1$ мм^2, при $d_0 = 150/(10\pi) = 4{,}77$ мм — 17,9 мм^2. С верной площадью масса пульки 0,34 г — как и при контрольном взвешивании (0,34 г); на диаметр жилы это почти не влияет (при выражении через d_0 площадь сокращается).

Ответ: 1) $m = \dfrac{\rho S\,(l_2 - l_1)}{N} \approx 0{,}34 \pm 0{,}02$ г; 2) $d = d_0\sqrt{\dfrac{\rho\,\Delta h}{(\rho_\text{м} - \rho_\text{а})\,l}} \approx 1{,}80 \pm 0{,}07$ мм.

Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{мм}^2 \cdot \frac{\text{г/см}^3\cdot\text{мм}}{\text{г/см}^3\cdot\text{мм}}} = \text{мм}$. Сверка с паспортом провода: сечение жилы $\pi d^2/4 = 2{,}54$ мм^2 при заявленных производителем 2,5 мм^2 (диаметр 1,78 мм) — совпадение в пределах погрешности. Масса пульки совпала с контрольным взвешиванием.

Смысл: ареометр — это весы, у которых «гирями» служит вытесненная вода; цена деления — $\rho S \approx 0{,}18$ г на сантиметр погружения.

Ответ. 1) $m \approx 0{,}34 \pm 0{,}02$ г (контрольное взвешивание — 0,34 г); 2) $d \approx 1{,}80 \pm 0{,}07$ мм (сечение жилы около 2,5 мм^2).