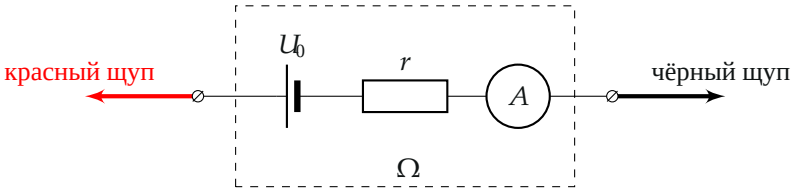
Два мультиметра

Задача 2. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 10 класс, задача 2 (практический тур)] «Два мультиметра».

Омметр — это прибор, позволяющий измерять сопротивление резисторов. Принципиальная схема омметра, изображённая на рисунке, содержит соединённые последовательно идеальный источник постоянного напряжения U_0, резистор сопротивлением r и идеальный амперметр.



При подключении к омметру исследуемого резистора показания амперметра автоматически пересчитываются так, что на табло прибора отображается значение сопротивления исследуемого резистора R_x, подключённого к омметру.

1. Определите сопротивление R выданного вам резистора.
2. Определите значения напряжения U_0 и сопротивления r на принципиальной схеме для выданного вам мультиметра в режиме омметра (диапазон «2000k»).
3. Оцените погрешность полученных значений R, U_0 и r.

Погрешность показаний мультиметра во всех режимах примите равной трём единицам последнего разряда. Внимание: мультиметр в режиме амперметра использовать запрещено!

▲ **Решение. Что происходит.** Омметр — это батарейка U_0 с резистором r и амперметром; по току $I = \dfrac{U_0}{r + R_x}$ он вычисляет и показывает $R_x = \dfrac{U_0}{I} - r$. Вольтметр — это резистор R_V, который показывает напряжение на себе. Главная идея: соединяя два прибора друг с другом и с резистором, получаем простые цепи «батарейка + резисторы», и каждое

показание даёт уравнение. Ниже приведены данные авторской установки организаторов (у участника числа свои).

Обозначения. R_V — сопротивление вольтметра на пределе «200m»; U_V — показание вольтметра, подключённого прямо к омметру; U'_V — то же, но с резистором R последовательно; R' — показание омметра на параллельном соединении R и вольтметра.

0. Сопротивление вольтметра. Один мультиметр — вольтметр («200m»), другой — омметр («2000k»), соединяем их друг с другом. Омметр показывает сопротивление вольтметра $R_V = 996$ кОм, вольтметр — напряжение на себе $U_V = 129{,}8$ мВ.

Пункт 1. Сопротивление резистора, способ 1. Резистор больше 2000 кОм — один омметр зашкаливает. Соединим последовательно оба омметра и резистор так, чтобы источники омметров были включены согласно (рис. 1). Ток в цепи $I = \dfrac{U_{01} + U_{02}}{r_1 + r_2 + R}$. Каждый омметр показывает $R_{\Omega i} = \dfrac{U_{0i}}{I} - r_i$, сумма показаний

$$R_{\Omega 1} + R_{\Omega 2} = \frac{U_{01} + U_{02}}{I} - r_1 - r_2 = R$$

— ровно искомое сопротивление, даже если приборы не одинаковые. Показания 1507 кОм и 1510 кОм:

$$R = 1507 + 1510 = 3017 \text{ кОм} \approx 3020 \text{ кОм}.$$

Погрешность: по 3 кОм на каждый прибор, 6 кОм (0,2 %); если показания «скачут» на ± 5 кОм, добавляем размах — 16 кОм (0,53 %).

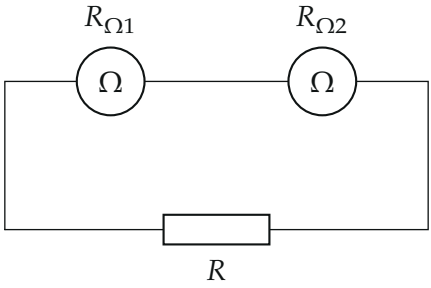


Рис. 1. Два омметра и резистор последовательно: сумма показаний равна R.

Пункт 1, способ 2. Соединим R и вольтметр параллельно и подключим омметр (рис. 2). Он показывает сопротивление параллельного соединения $R' = 749$ кОм:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{R_V R'}{R_V - R'} = \frac{996 \cdot 749}{247}\ \text{кОм} \approx 3020\ \text{кОм}.$$

Погрешность больше: в знаменателе разность близких чисел, $\varepsilon_R = \varepsilon_{R'} + \varepsilon_{R_V} + \dfrac{\Delta R_V + \Delta R'}{R_V - R'} = \dfrac{3}{749} + \dfrac{3}{996} + \dfrac{6}{247} \approx 3{,}1\,\%$. Оба способа дали одно значение — это проверка.

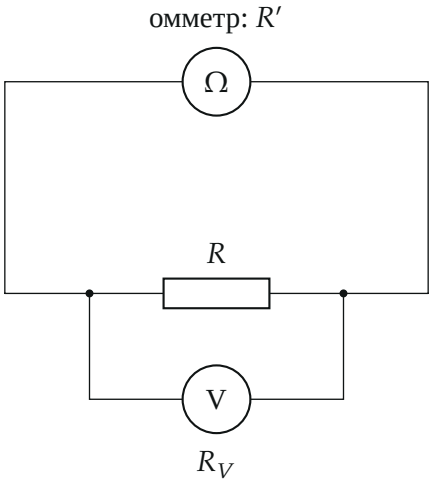


Рис. 2. Резистор и вольтметр параллельно, к ним — омметр.

Пункт 2. Напряжение U_0 и сопротивление r. Соберём последовательно омметр, вольтметр («200m») и резистор R. Омметр зашкаливает, но цепь работает: это источник U_0 с резисторами r, R и R_V (рис. 3), вольтметр показывает $U'_V = 51{,}6$ мВ. По закону Ома для полной цепи напряжение на вольтметре

$$U'_V = \frac{U_0 R_V}{r + R + R_V}, \qquad U_V = \frac{U_0 R_V}{r + R_V}\ \text{(без резистора, шаг 0)}.$$

Перевернём оба равенства и вычтем — r уйдёт:

$$\frac{1}{U'_V} - \frac{1}{U_V} = \frac{R}{U_0 R_V} \quad \Longrightarrow \quad U_0 = \frac{U_V\, R/R_V}{U_V/U'_V - 1},$$

$$U_0 = \frac{129{,}8 \cdot 3017/996}{129{,}8/51{,}6 - 1}\ \text{мВ} = \frac{393{,}2}{1{,}516}\ \text{мВ} \approx 259\ \text{мВ}.$$

Из второго равенства

$$r = \frac{U_0 R_V}{U_V} - R_V = \frac{R}{U_V/U'_V - 1} - R_V = \frac{3017}{1{,}516} - 996\ \text{кОм} \approx 995\ \text{кОм}.$$

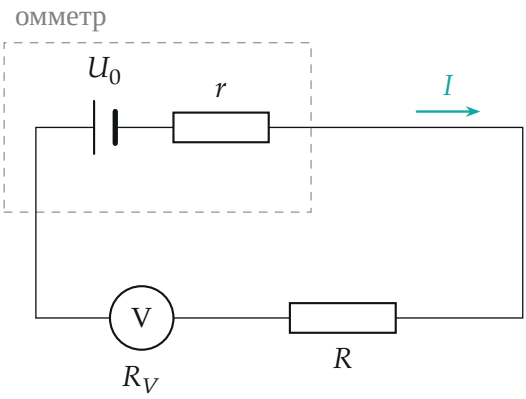


Рис. 3. Омметр (в пунктире — его принципиальная схема), резистор R и вольтметр последовательно. Это одна петля с током $I = U_0/(r + R + R_V)$.

Второй способ увидеть ответ — график. По формуле Ома $\dfrac{1}{U_V} = \dfrac{r + R_V + R_x}{U_0 R_V}$ — линейная функция добавочного сопротивления R_x. Две точки ($R_x = 0$ и $R_x = R$) задают прямую (рис. 4); её наклон $\dfrac{1}{U_0 R_V}$ даёт U_0, а пересечение с осью R_x — точка $R_x = -(r + R_V) = -1991$ кОм, откуда $r = 1991 - 996 = 995$ кОм.

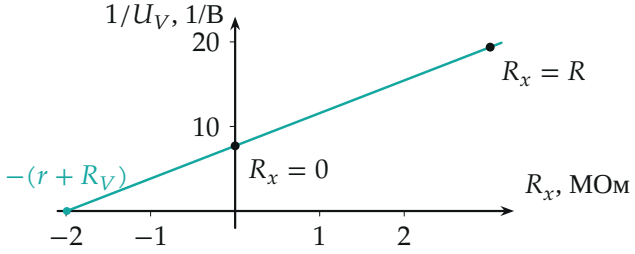


Рис. 4. Обратное показание вольтметра линейно зависит от добавочного сопротивления в цепи. Прямая через две измеренные точки пересекает ось при $R_x = -(r + R_V)$.

Пункт 3. Погрешности U_0 и r. Сначала — для $k = U_V/U'_V - 1 = 1{,}516$:

$$\varepsilon_k = \frac{(U_V/U'_V)(\varepsilon_{U_V} + \varepsilon_{U'_V})}{k} = \frac{2{,}516\,(0{,}3/129{,}8 + 0{,}3/51{,}6)}{1{,}516} \approx 1{,}3\,\%.$$

Тогда, складывая относительные погрешности (с $\varepsilon_R = 0{,}53\,\%$ способа 1),

$$\varepsilon_{U_0} = \varepsilon_{U_V} + \varepsilon_R + \varepsilon_{R_V} + \varepsilon_k = 0{,}23 + 0{,}53 + 0{,}30 + 1{,}3 \approx 2{,}4\,\%,$$

$$\Delta U_0 \approx 6\text{ мВ};$$

$$\Delta r = \frac{R}{k}(\varepsilon_R + \varepsilon_k) + \Delta R_V = 1991 \cdot 0{,}018 + 3 \approx 39\text{ кОм} \approx 40\text{ кОм}.$$

У организаторов в ответе $\Delta r \approx 57$ кОм; по их же формуле и их числам получается 39 кОм — порядок погрешности тот же (несколько процентов).

Обратите внимание. Сопротивление омметра $r \approx 1$ МОм — того же порядка, что и измеряемые резисторы: на диапазоне «2000k» середина шкалы как раз при $R_x = r$. Пренебречь им в цепи рис. 3 нельзя.

Ответ: 1) $R = R_{\Omega 1} + R_{\Omega 2} \approx 3020 \pm 16$ кОм (0,5 %); 2) $U_0 = \dfrac{U_V R/R_V}{U_V/U'_V - 1} \approx 259$ мВ, $r = \dfrac{R}{U_V/U'_V - 1} - R_V \approx 995$ кОм; 3) $\Delta U_0 \approx 6$ мВ, $\Delta r \approx 40$ кОм.

Проверка. Размерность: U_0 — мВ·кОм/кОм. Самосогласованность: омметр с $U_0 = 259$ мВ и $r = 995$ кОм при подключении вольтметра даёт ток $259/(995 + 996) = 0{,}130$ мкА и напряжение на вольтметре $0{,}130 \cdot 996 = 129{,}5$ мВ — совпадает с измеренным 129,8 мВ в пределах погрешности. Сопротивление R двумя способами: 3017 и 3020 кОм.

Смысл: прибор, который «умеет мерить только сопротивление», раскрывает своё внутреннее устройство, если измерять им цепи, в которых он сам — часть цепи.

Ответ. 1) $R \approx 3020$ кОм, погрешность около 0,5 % (два способа: 3017 и 3020 кОм); 2) $U_0 \approx 259$ мВ, $r \approx 995$ кОм; 3) $\Delta U_0 \approx 6$ мВ, $\Delta r \approx 40$ кОм.