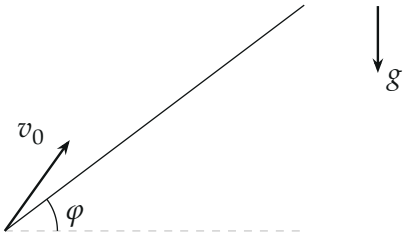
Хитрая пушка

Задача 1. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 10 класс, задача 1] «Хитрая пушка».

Скорость вылета снаряда из игрушечной пушки зависит от угла с вертикалью, под которым производится выстрел. Особенность этой зависимости состоит в том, что угловая скорость вращения вектора скорости снаряда сразу после выстрела не зависит от угла, под которым произведён выстрел, и равна $\omega = 0{,}5$ рад/с. Пушка располагается у подножия длинной горки, образующей угол $\varphi = 30°$ с горизонтом. Траектория снаряда лежит в плоскости рисунка и такова, что в определённый момент снаряд падает на горку. Сопротивлением воздуха, а также размерами пушки и снаряда можно пренебречь. Чему равно максимально возможное время полёта снаряда t_{max} до падения на горку?



▲ **Решение. Что происходит.** Снаряд летит с постоянным ускорением $\vec{g}$ — это баллистика, но с необычным условием: скорость вылета не задана, а связана с углом выстрела через скорость поворота вектора $\vec{v}$. Главная идея: вектор скорости поворачивается только из-за нормальной (перпендикулярной скорости) составляющей ускорения, $a_n = \omega v$. Отсюда найдём $v_0(\alpha)$, а время полёта до склона удобно считать по оси, перпендикулярной склону: вдоль неё снаряд движется как брошенный вверх. Это задача на экстремум: остаётся выбрать лучший угол.

Обозначения. α — угол между $\vec{v}_0$ и вертикалью; $v_0(\alpha)$ — скорость вылета; ось x' — вдоль склона вверх, ось y' — перпендикулярно склону от него; t — время полёта до падения на склон.

1. Скорость вылета. Разложим ускорение $\vec{g}$ в момент вылета на касательную к траектории составляющую a_τ (вдоль $\vec{v}_0$) и нормальную a_n

(перпендикулярно $\vec{v}_0$), рис. 1. Касательная меняет только модуль скорости, нормальная — только направление. За малое время dt вектор $\vec{v}$ поворачивается на угол $d\theta$, и его конец смещается поперёк на $v\,d\theta = a_n\,dt$, поэтому

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{a_n}{v_0}.$$

Угол между $\vec{g}$ (вниз) и прямой, по которой направлена $\vec{v}_0$, равен α, значит $a_n = g\sin\alpha$, и

$$v_0(\alpha) = \frac{g\sin\alpha}{\omega}.$$

Чем ближе выстрел к горизонтали, тем быстрее снаряд вылетает; при вертикальном выстреле ($\alpha = 0$) $v_0 = 0$.

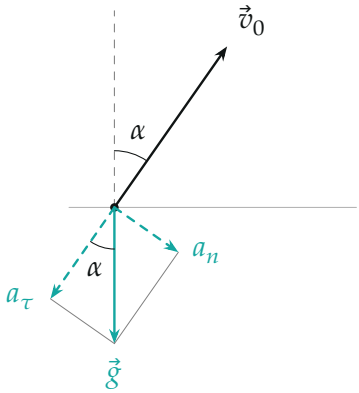


Рис. 1. Ускорение $\vec{g}$ в момент вылета раскладываем вдоль скорости ($a_\tau = g\cos\alpha$) и поперёк неё ($a_n = g\sin\alpha$). Поворачивает вектор скорости только a_n.

2. Время полёта до склона. Перейдём к осям, связанным со склоном (рис. 2). Зачем: падение на склон — это момент, когда координата y' снова стала нулём, а вдоль y' движение равнозамедленное, как у камня, брошенного вверх. Угол между $\vec{v}_0$ и склоном равен $90^\circ - \alpha - \varphi$, поэтому

$$v_{0y'} = v_0\cos(\alpha+\varphi), \qquad g_{y'} = -g\cos\varphi.$$

Закон движения вдоль y': $y' = v_{0y'}t - \dfrac{g\cos\varphi\, t^2}{2}$. Приравняв нулю, получим время полёта:

$$t = \frac{2v_{0y'}}{g\cos\varphi} = \frac{2v_0\cos(\alpha+\varphi)}{g\cos\varphi} = \frac{2\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)}{\omega\cos\varphi}.$$

Ускорение g сократилось: и скорость вылета, и «торможение» вдоль y' пропорциональны g. Формула имеет смысл при $\alpha+\varphi < 90°$ — иначе снаряд летит не над склоном.

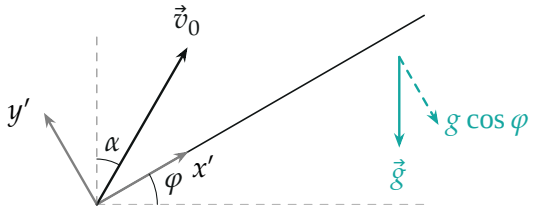


Рис. 2. Оси, связанные со склоном. Вдоль y' снаряд вылетает со скоростью $v_0\cos(\alpha+\varphi)$ и тормозится ускорением $g\cos\varphi$.

3. Максимум времени — тригонометрией. Произведение превратим в сумму:

$$2\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi) = \sin(2\alpha+\varphi) - \sin\varphi, \qquad t(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha+\varphi)-\sin\varphi}{\omega\cos\varphi}.$$

Зависимость от α осталась только в $\sin(2\alpha+\varphi)$, его наибольшее значение 1 при $2\alpha+\varphi = 90°$, то есть

$$\alpha^* = 45° - \frac{\varphi}{2} = 30°, \qquad t_{max} = \frac{1-\sin\varphi}{\omega\cos\varphi}.$$

График $t(\alpha)$ на рис. 3 построен по этой формуле: при $\alpha = 0$ снаряд не вылетает ($v_0 = 0$), при $\alpha = 60°$ он летит вдоль склона ($v_{0y'} = 0$); в обоих краях $t = 0$, между ними — максимум.

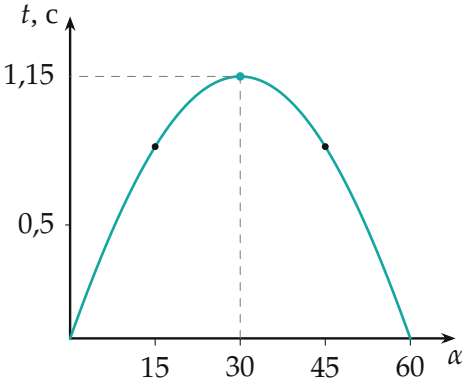


Рис. 3. Время полёта до склона в зависимости от угла выстрела с вертикалью: максимум 1,15 с при $\alpha = 30°$; выстрелы под 15° и 45° дают одинаковое время 0,85 с.

4. Второй способ — годограф скорости. Из $v_0 = \frac{g}{\omega}\sin\alpha$ и $v_{0x} = v_0\sin\alpha$ (ось x — горизонтально, y — вертикально вверх) получаем $v_0^2 = \frac{g}{\omega}v_{0x}$, или

$$v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = \frac{g}{\omega}v_{0x} \quad\Leftrightarrow\quad \left(v_{0x} - \frac{g}{2\omega}\right)^2 + v_{0y}^2 = \left(\frac{g}{2\omega}\right)^2.$$

Концы всех возможных векторов $\vec{v}_0$ лежат на окружности радиуса $\frac{g}{2\omega}$, проходящей через начало координат, с центром C на оси v_x (рис. 4). Время полёта пропорционально $v_{0y'}$ — расстоянию от конца вектора до прямой склона. Самая далёкая от этой прямой точка окружности P лежит на перпендикуляре к склону, проведённом через центр C. Центр C лежит *под* прямой склона на расстоянии $\frac{g}{2\omega}\sin\varphi$, а точка P — на радиус выше центра, поэтому

$$v_{0y'\,max} = \frac{g}{2\omega} - \frac{g}{2\omega}\sin\varphi = \frac{g(1-\sin\varphi)}{2\omega},$$

$$t_{max} = \frac{2v_{0y'\,max}}{g\cos\varphi} = \frac{1-\sin\varphi}{\omega\cos\varphi}.$$

Ответ совпал. Вектор $\vec{v}_0$, проведённый в точку P, составляет с вертикалью ровно 30° — тот же угол α^*.

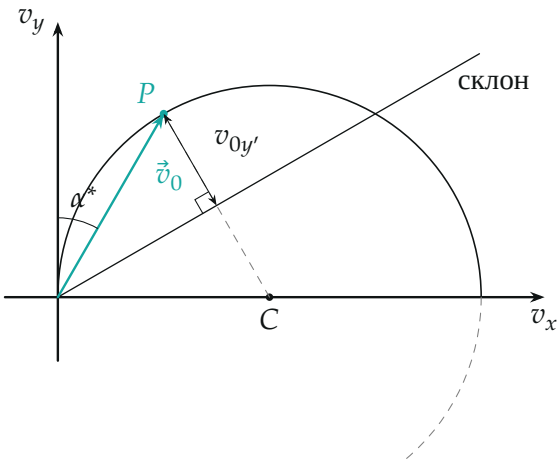


Рис. 4. Годограф: концы возможных векторов $\vec{v}_0$ лежат на окружности с центром C. Дальше всех от прямой склона точка P на перпендикуляре к склону через C.

5. Как выглядят траектории. При $\alpha^* = 30°$ скорость вылета $v_0 = \dfrac{g \sin 30°}{\omega} \approx 9{,}8$ м/с, снаряд падает на склон через 1,15 с в точке на расстоянии 6,5 м от пушки. Выстрелы под 15° (медленнее, но круче к склону) и под 45° (быстрее, но более полого) дают одно и то же меньшее время 0,85 с (рис. 5).

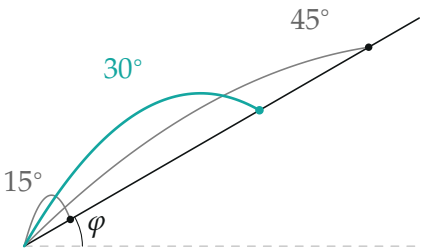


Рис. 5. Траектории при $\alpha = 15°, 30°$ и $45°$ (масштаб общий, точки падения отмечены). Дольше всех летит снаряд, выпущенный под 30° к вертикали.

Обратите внимание. Угол в условии отсчитывается от *вертикали*, а не от горизонта, и скорость вылета не постоянна: при фиксированной v_0 дольше всех летел бы снаряд, выпущенный перпендикулярно склону, но здесь это выстрел влево от вертикали ($\alpha = -\varphi$), и скорость вылета $\propto \sin\alpha$ теряет смысл. Максимум ищем по полной зависимости $t(\alpha)$, где от угла зависит и v_0.

Ответ:

$$t_{max} = \frac{1-\sin\varphi}{\omega\cos\varphi} = \frac{1-0{,}5}{0{,}5\cdot 0{,}866}\ \text{с} \approx 1{,}15\ \text{с}.$$

Проверка. Размерность: $[1/\omega] = \text{с}$ — верно. Предел $\varphi \to 0$ (горизонтальная площадка): $t_{max} = 1/\omega = 2$ с; проверим напрямую: $t = 2v_0\cos\alpha/g = \sin 2\alpha/\omega$, максимум $1/\omega$ при $\alpha = 45°$ — сходится. Предел $\varphi \to 90°$: $t_{max} \to 0$ — у вертикальной стены снаряд сразу оказывается «на склоне». Второй способ (годограф) дал тот же ответ.

Смысл: выгодно стрелять не слишком полого (растёт скорость, но падает её доля поперёк склона) и не слишком круто (мала сама скорость); компромисс — выстрел по биссектрисе угла между вертикалью и склоном: $\alpha^* = \frac{1}{2}(90° - \varphi)$.

Ответ. $t_{max} = \dfrac{1-\sin\varphi}{\omega\cos\varphi} \approx 1{,}15$ с (при выстреле под углом $\alpha = 45° - \varphi/2 = 30°$ к вертикали).