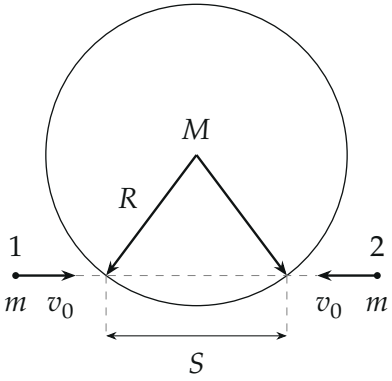
Шайбами по барабану

Задача 2. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 10 класс, задача 2] «Шайбами по барабану».

На гладкой горизонтальной поверхности лежит большой твёрдый цилиндрический барабан массой M и радиусом R. Две одинаковые маленькие, но тяжёлые шайбы массами $m = 2M$ скользят по поверхности с одинаковыми неизвестными скоростями v_0 вдоль одной прямой, пересекающей барабан. Расстояние между точками пересечения этой прямой с боковой поверхностью барабана равно S. Шайба 1 сталкивается с барабаном на мгновение раньше, чем с ним столкнулась бы шайба 2, если бы не было столкновения с шайбой 1. Если расстояние S равно $S_1 = R/2$, то после всех соударений шайб с барабаном скорость последнего оказалась равной u_1. Считайте известным, что во всех случаях шайбы друг с другом не сталкиваются. Трения между шайбами и барабаном нет, барабан никогда не отрывается от поверхности, а все их столкновения являются упругими и настолько быстрыми, что барабан никогда не контактирует с обеими шайбами одновременно.



1. Определите величину скорости v_0 налетавших шайб.
2. Чему будет равна скорость барабана u_2, если расстояние S изменить до значения $S_2 = R$?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на упругий удар двух тел. Трения нет, поэтому сила удара направлена по нормали к поверхности барабана — по линии, соединяющей точку удара с его центром. Вдоль этой линии удар одномерный, а поперёк неё скорости не меняются. Главная идея: после первого удара барабан уже движется, и шайба 2 может его *не догнать*. Это надо проверить, а не считать «два удара» по умолчанию.

Обозначения. A и B — точки, где прямая шайб пересекает барабан; O — центр барабана; α — угол между скоростью шайбы и радиусом в точке удара; $\vec{n}_1$ — единичный вектор от A к O, $\vec{n}_2$ — от B к O; $\vec{v}_{M1}$ — скорость барабана после первого удара, $\vec{v}_{M2}$ — добавка от второго удара.

1. Геометрия удара. Половина хорды AB — катет прямоугольного треугольника с гипотенузой R (рис. 1), поэтому

$$\cos\alpha = \frac{S/2}{R} = \frac{S}{2R}.$$

Скорость шайбы v_0 раскладываем по линии удара ($v_0\cos\alpha$) и поперёк неё ($v_0\sin\alpha$). Поперечная часть при ударе без трения не меняется.

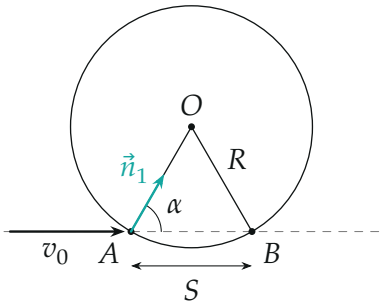


Рис. 1. Удар шайбы 1 в точке A: сила удара — вдоль $\vec{n}_1$ (к центру), угол между $\vec{v}_0$ и $\vec{n}_1$ равен α, $\cos\alpha = S/(2R)$. Здесь нарисован случай $S = R$, $\alpha = 60°$.

2. Первый удар — закон сохранения импульса и энергии. За время удара внешние силы по горизонтали не действуют, поэтому сохраняется импульс системы «шайба 1 + барабан» в проекции на $\vec{n}_1$; удар упругий — сохраняется кинетическая энергия. Поперечная скорость шайбы не

меняется и из закона сохранения энергии выпадает:

$$\begin{cases} mv_0\cos\alpha = mv_{1n} + Mv_{M1}, \\ mv_0^2\cos^2\alpha = mv_{1n}^2 + Mv_{M1}^2. \end{cases}$$

Перенесём члены с m влево и поделим второе уравнение на первое: $v_0\cos\alpha + v_{1n} = v_{M1}$ (относительная скорость вдоль линии удара меняет знак). Подставив v_{1n} в первое уравнение, получим

$$v_{M1} = \frac{2m}{m+M}\,v_0\cos\alpha = \frac{4}{3}\,v_0\cos\alpha,$$

$$v_{1n} = \frac{m-M}{m+M}\,v_0\cos\alpha = \frac{1}{3}\,v_0\cos\alpha.$$

Барабан поехал вдоль $\vec{n}_1$. Шайба 1 после удара продолжает двигаться к центру, но втрое медленнее барабана вдоль $\vec{n}_1$ — она отстаёт и больше его не догонит.

3. Догонит ли барабан шайба 2. Перейдём в систему отсчёта барабана после первого удара (рис. 2). Зачем: в ней барабан стоит, и вопрос «будет ли удар» сводится к знаку скорости шайбы 2 вдоль $\vec{n}_2$ в точке B. Шайба 2 в этот момент находится у точки B. Её скорость вдоль $\vec{n}_2$ в земной системе равна $v_0\cos\alpha$, а барабана — $\vec{v}_{M1}\cdot\vec{n}_2 = v_{M1}\cos(180^\circ - 2\alpha) = -v_{M1}\cos 2\alpha$, поскольку угол между $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ равен $180^\circ - 2\alpha$. Скорость сближения

$$w = v_0\cos\alpha + v_{M1}\cos 2\alpha = v_0\cos\alpha\left(1 + \frac{4}{3}\cos 2\alpha\right).$$

Удар будет только при $w > 0$:

$$1 + \frac{4}{3}(2\cos^2\alpha - 1) > 0 \iff \cos^2\alpha > \frac{1}{8},$$

$$S = 2R\cos\alpha > \frac{R}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71R.$$

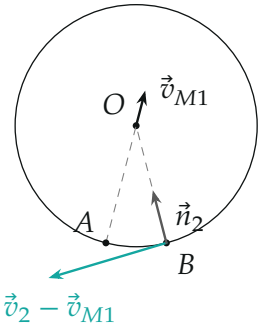


Рис. 2. Случай $S_1 = R/2$ после первого удара. Барабан уходит вдоль $\vec{n}_1$ со скоростью $v_0/3$. Относительно барабана шайба 2 движется почти по касательной и чуть от *центра: проекция на $\vec{n}_2$ отрицательна, удара нет.*

Пункт 1. При $S_1 = R/2$ условие $S > R/\sqrt{2}$ не выполнено, второго удара нет: $w = v_0 \cdot \frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{3}\cdot(-\frac{7}{8})\right) = -\dfrac{v_0}{24} < 0$. Значит, итоговая скорость барабана — скорость после первого удара:

$$u_1 = v_{M1} = \frac{4}{3}v_0 \cdot \frac{S_1}{2R} = \frac{4}{3}v_0 \cdot \frac{1}{4} = \frac{v_0}{3} \quad \Longrightarrow \quad v_0 = 3u_1.$$

Пункт 2. При $S_2 = R$: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60°$, условие $S > R/\sqrt{2}$ выполнено — удар шайбы 2 будет.

4. Первый удар. $v_{M1} = \dfrac{4}{3}v_0 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{2v_0}{3}$ вдоль $\vec{n}_1$.

5. Второй удар — в системе отсчёта барабана. В ней барабан покоится, и удар такой же, как первый, только со скоростью сближения

$$w = v_0\cos 60° + v_{M1}\cos 120° = \frac{v_0}{2} - \frac{2v_0}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{v_0}{6}.$$

Формула шага 2 даёт добавку к скорости барабана вдоль $\vec{n}_2$:

$$v_{M2} = \frac{4}{3}w = \frac{2v_0}{9}.$$

Барабан после второго удара движется со скоростью $\vec{v}_{M1} + \vec{v}_{M2}$; её проекция на $\vec{n}_1$ только выросла ($\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \cos 60° > 0$), поэтому к шайбе 1

барабан не вернётся.

6. Сложение скоростей. Угол между $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ равен $180^\circ - 2\alpha = 60^\circ$ (рис. 3). По теореме косинусов

$$u_2^2 = v_{M1}^2 + v_{M2}^2 + 2v_{M1}v_{M2}\cos 60^\circ = v_0^2\left(\frac{4}{9} + \frac{4}{81} + \frac{4}{27}\right) = \frac{52}{81}v_0^2,$$

$$u_2 = \frac{2\sqrt{13}}{9}\,v_0.$$

С $v_0 = 3u_1$ из пункта 1:

$$u_2 = \frac{2\sqrt{13}}{3}\,u_1 \approx 2{,}40\,u_1.$$

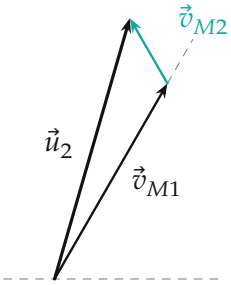


Рис. 3. Скорость барабана в случае $S_2 = R$ — сумма двух толчков: вдоль $\vec{n}_1$ (первый удар) и вдоль $\vec{n}_2$ (второй). Длины стрелок пропорциональны скоростям: $v_{M1} = 2v_0/3$, $v_{M2} = 2v_0/9$, угол между ними 60° (продолжение $\vec{v}_{M1}$ — пунктир).

7. Где проходит граница. Скорость сближения шайбы 2 с барабаном $w/v_0 = \cos\alpha\left(1 + \frac{4}{3}\cos 2\alpha\right)$ как функция S/R на рис. 4 (по формуле шага 3; S не больше диаметра, на рисунке — до $1{,}5R$). Отрицательная часть — шайба 2 не догоняет барабан. Наш первый случай ($S = R/2$) лежит слева от границы $S = R/\sqrt{2}$, второй ($S = R$) — справа.

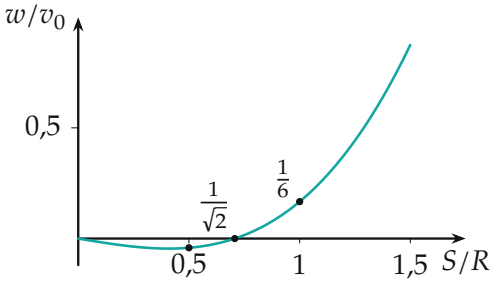


Рис. 4. Скорость сближения шайбы 2 с движущимся барабаном. Точки — случаи $S = R/2$ ($w = -v_0/24$, удара нет) и $S = R$ ($w = v_0/6$).

Обратите внимание. В первом случае барабан после удара шайбы 1 уходит от шайбы 2 почти так же быстро, как она движется к нему: удар шайбы 2 не наступает, и вся скорость u_1 — от одного удара. Если считать два удара по умолчанию, получится неверное v_0.

Ответ: 1) $v_0 = 3u_1$; 2) $u_2 = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}\,u_1 \approx 2{,}4\,u_1$.

Проверка. Размерность — скорости через скорости. Предельный случай: при $M \ll m$ формула удара даёт $v_M = 2v_0\cos\alpha$ — лёгкое тело отскакивает от тяжёлого с удвоенной скоростью, как мяч от движущейся стены. Численное моделирование (python) обоих случаев с проверкой всех возможных повторных ударов дало $|\vec{u}| = v_0/3$ при $S = R/2$ (один удар) и $0{,}8012\,v_0 = \frac{2\sqrt{13}}{9}v_0$ при $S = R$ (два удара), граница числа ударов — между $S = 0{,}7071R$ и $0{,}71R$.

Смысл: шайба 2 — «запоздавший» участник; ударит ли она, решает скорость барабана после первого удара, а не только геометрия.

Ответ. 1) $v_0 = 3u_1$; 2) $u_2 = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}\,u_1 \approx 2{,}4\,u_1$.