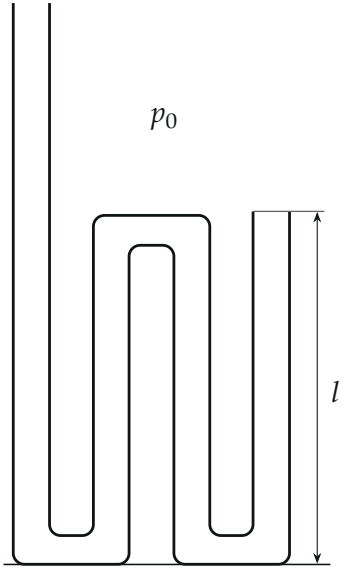
Загогулина

Задача 3. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 10 класс, задача 3] «Загогулина».

Изогнутая в трех местах металлическая трубка состоит из четырех прямых параллельных участков: трех — одинаковой длины l и четвертого, длина которого существенно больше (см. рисунок). Длина изогнутых участков трубки мала по сравнению с l, их объемом можно пренебречь. Площадь внутреннего сечения трубки S, поперечные размеры трубки также много меньше l. Трубка установлена вертикально открытыми концами вверх. В самое длинное колено начинают медленно наливать воду.

Плотность воды — ρ, атмосферное давление p_0, ускорение свободного падения g. Все процессы в трубке протекают при постоянной температуре. Капиллярными эффектами и влиянием колебаний уровня воды можно пренебречь.



1. До какой высоты вода заполнит левое колено трубки к моменту, когда она начнет вытекать из крайнего правого колена? Считайте, что из левого колена вода не вытекает.
2. Какой объем воды будет находиться в трубке в этот момент?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидростатику с запертым газом: равенство давлений в сообщающихся сосудах плюс закон Бойля — Мариотта. Давайте проследим за водой по шагам (рис. 1). Сначала она заполняет U-образную часть из колен 1 и 2, уровни в них одинаковы. Когда вода дойдёт до верха колена 2, она перельётся в колено 3, стечёт вниз и закроет изгиб между коленами 3 и 4. С этого момента воздух в колене 3 заперт: при дальнейшем доливании он сжимается, и вода в колене 4 стоит выше, чем в колене 3.

Обозначения. Колена нумеруем слева направо: 1 — длинное, 2, 3, 4 — длины l. H — высота воды в колене 1 (от дна) в искомый момент; x — длина воздушного столба в колене 3; p — давление запертого воздуха; $l_0 = \dfrac{p_0}{\rho g}$ — высота водяного столба, создающего давление p_0.

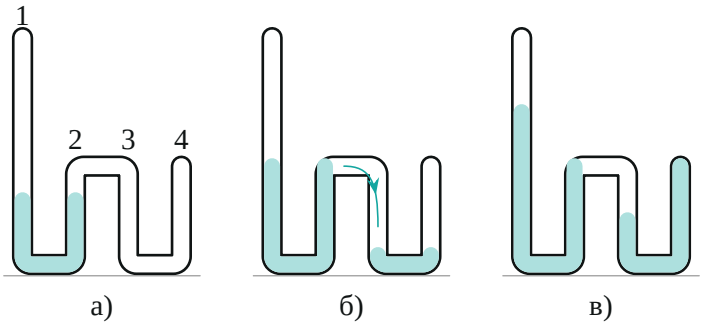


Рис. 1. Этапы наполнения: а) вода в коленах 1 и 2 на одном уровне; б) вода переливается через верх колена 2 и закрывает изгиб между коленами 3 и 4 — воздух объёмом lS при давлении p_0 заперт; в) вода дошла до верха колена 4, воздух сжат до давления p.

1. Колено 2 всё время полное. Пока воздух сжимается, вода, приходящая в колено 1, поднимает уровень в колене 2 — но он уже у края, и лишняя вода переливается в колено 3. Поэтому в искомый момент колено 2 заполнено до верха, высота l, а над ним — запертый воздух с давлением p.

2. Равновесие колен 3 и 4. Давление в нижнем изгибе между коленами 3 и 4 одно и то же со стороны обоих колен (вода неподвижна). В

колене 4 вода до верха, над ней атмосфера; в колене 3 вода высотой $l-x$, над ней воздух:

$$p_0 + \rho g l = p + \rho g (l - x) \quad \Longrightarrow \quad p = p_0 + \rho g x.$$

Воздух сжат сильнее атмосферы — вода в колене 3 ниже, чем в колене 4, на x.

3. Равновесие колен 1 и 2. Так же для нижнего изгиба между коленами 1 и 2:

$$p_0 + \rho g H = p + \rho g l \quad \Longrightarrow \quad p = p_0 + \rho g (H - l).$$

Сравнив со шагом 2, получаем $H - l = x$: вода в колене 1 стоит выше верха колена 2 ровно на длину воздушного столба.

4. Закон Бойля — Мариотта для запертого воздуха. Температура постоянна, масса воздуха не меняется; начальное состояние — момент запирания (рис. 1б): объём lS, давление p_0. Конечное — объём xS, давление p:

$$p_0 l S = p x S \quad \Longrightarrow \quad (p_0 + \rho g x)\, x = p_0 l.$$

Поделим на ρg и введём $l_0 = p_0/(\rho g)$:

$$x^2 + l_0 x - l_0 l = 0, \qquad x = \frac{\sqrt{l_0^2 + 4 l_0 l} - l_0}{2}$$

(второй корень отрицателен и смысла не имеет).

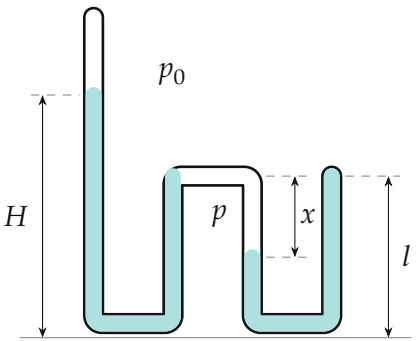


Рис. 2. Момент, когда вода начинает вытекать из колена 4. Колено 2 полное, в колене 3 — воздух длиной x под давлением p. Пропорции для наглядности взяты при $l_0 \approx 0{,}67\,l$; для воды и коротких колен x почти равно l.

Пункт 1.

$$H = l + x = l + \frac{1}{2}\left(\sqrt{l_0^2 + 4l_0 l} - l_0\right), \qquad l_0 = \frac{p_0}{\rho g}.$$

Пункт 2. Объём воды — сумма длин столбов воды, умноженная на S (изгибы не считаем):

$$V = S(\underbrace{H}_{1} + \underbrace{l}_{2} + \underbrace{(l-x)}_{3} + \underbrace{l}_{4}) = S(l + x + l + l - x + l) = 4Sl.$$

Длина воздушного столба x сократилась: сколько воды «не хватает» в колене 3, столько же лишней стоит над краем колена 2 в колене 1. Объём не зависит ни от p_0, ни от ρ.

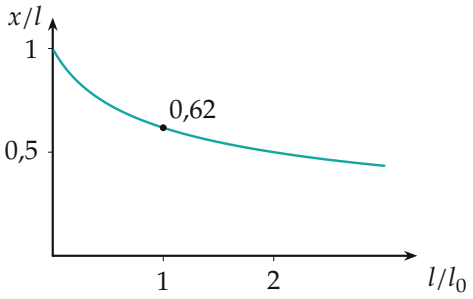


Рис. 3. Доля колена 3, занятая воздухом, $x/l = \dfrac{\sqrt{1 + 4l/l_0} - 1}{2l/l_0}$, в зависимости от l/l_0. При $l \ll l_0$ воздух почти не сжат ($x \to l$).

Обратите внимание. Запертый воздух — это колено 3, а не колено 2: в колене 2 всё время стоит вода до самого края, иначе не было бы перелива. Ошибка в том, «где воздух», даёт неверный начальный объём в законе Бойля — Мариотта.

Ответ: 1) $H = l + \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{l_0^2 + 4l_0 l} - l_0\right)$, $l_0 = \dfrac{p_0}{\rho g}$; 2) $V = 4Sl$.

Проверка. Размерность: под корнем — квадрат длины, H — длина. Предел $l \ll l_0$ (короткие колена, обычный случай: для воды $l_0 \approx 10$ м): $\sqrt{l_0^2 + 4l_0 l} \approx l_0 + 2l - \dfrac{2l^2}{l_0}$, тогда $x \approx l - \dfrac{l^2}{l_0}$ и $H \approx 2l$ — воздух почти не сжимается, и вода в колене 1 стоит на высоте двух колен. Например, при $l = 10$ см: $x \approx 9{,}9$ см, $H \approx 19{,}9$ см. Второй способ для объёма: вся вода над уровнем дна — $H + l + (l - x) + l$, и с $H = l + x$ это $4l$ при любом x (рис. 3 не нужен для ответа 2).

Смысл: воздушная «пробка» передаёт давление от колена 4 к колену 1 — над колонкой воды в колене 1 нарастает лишний столб ровно той высоты, на которую сжат воздух.

Ответ. 1) $H = l + \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{l_0^2 + 4l_0 l} - l_0\right)$, где $l_0 = \dfrac{p_0}{\rho g}$; 2) $V = 4Sl$.