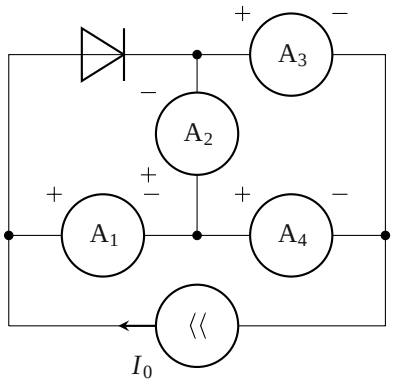
Источник стабильности

Задача 4. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 10 класс, задача 4] «Источник стабильности».

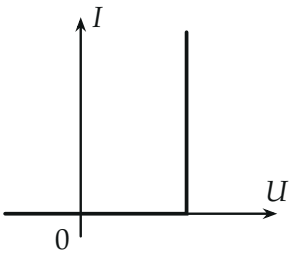
Готовясь к олимпиаде по физике, десятиклассник Денис собрал электрическую цепь (см. рис. а), состоящую из четырёх одинаковых амперметров, диода и регулируемого источника тока. Полярность подключения амперметров и направление тока через источник указаны на схеме, а зависимость силы тока, протекающего через диод, от напряжения на нём представлена на рис. б. Изменяя силу тока I_0, выдаваемую источником, Денис выяснил, что зависимость силы тока через один из амперметров от I_0 имеет вид, изображённый на рис. в, где I_1 — известный параметр.



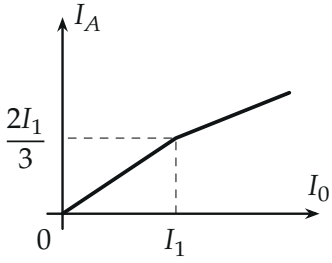
а)

1. Для какого из амперметров (A_1, A_3 или A_4) справедлива зависимость, изображённая на рис. в? Свой ответ обоснуйте.
2. Определите, при каком значении I_0 ток через амперметр A_2 не течёт.
3. Постройте качественный график зависимости показаний амперметра A_2 от силы тока через источник, указав на нём координаты характерных точек.

Примечание: Источником тока называется устройство, через которое течёт заданный ток, независимо от параметров внешней цепи.



б)



в)

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на цепь с диодом — класс «перебор состояний диода». Амперметры одинаковые и неидеальные: каждый — резистор сопротивлением r. Диод по графику б) — идеальный ключ с порогом: пока напряжение на нём меньше U_D, ток через него не течёт (ветви как будто нет); когда диод открыт, напряжение на нём равно U_D при любом токе. Излом графика в) при $I_0 = I_1$ — момент открытия диода.

Обозначения. r — сопротивление амперметра; U_D — напряжение открытия диода; I_{Ak} — показание амперметра A_k (положительное, если ток входит в клемму «+»); узлы: L — левый, M — средний (между A_1 и A_4), T — верхний (между диодом и A_3), P — правый. Источник гонит ток I_0 от P к L, то есть во внешней цепи — от L к P.

Пункт 1. Диод закрыт ($I_0 < I_1$). Ветви диода нет (рис. 1). Весь ток I_0 идёт через A_1 в узел M. Оттуда до P два пути: через A_4 (сопротивление r) и через A_2 и A_3 последовательно ($2r$). Напряжения на параллельных путях равны, поэтому токи обратно пропорциональны сопротивлениям:

$$I_{A1} = I_0, \qquad I_{A4} = \frac{2r}{r+2r}\,I_0 = \frac{2I_0}{3}, \qquad I_{A2} = I_{A3} = \frac{I_0}{3}.$$

Ток через A_2 идёт снизу вверх, от M к T — в клемму «+»: показание положительное. Начальный участок графика в) — $I_A = \dfrac{2I_0}{3}$, это амперметр A_4: у A_1 наклон 1, у A_3 — $\dfrac{1}{3}$.

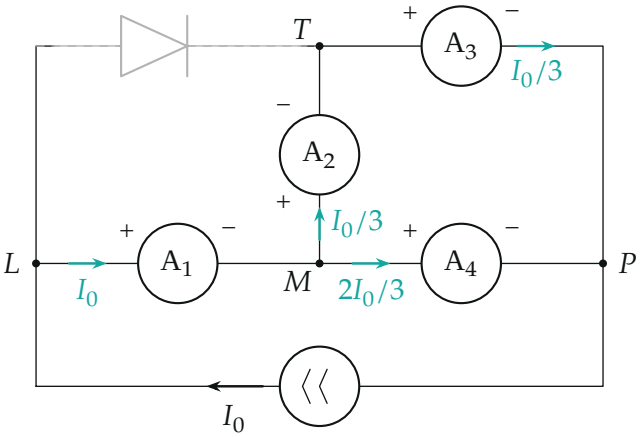


Рис. 1. Диод закрыт — его ветви нет (серый пунктир). Токи делятся между A_4 и цепочкой A_2–A_3 в отношении 2 : 1.

2. Напряжение открытия диода. Диод подключён между узлами L и T. Напряжение на нём при закрытом диоде — сумма напряжений на A_1 и A_2 (путь $L \to M \to T$):

$$U_{LT} = I_0 r + \frac{I_0}{3} r = \frac{4I_0 r}{3}.$$

Оно растёт с I_0; при $I_0 = I_1$ достигает U_D — диод открывается, и график в) ломается. Значит,

$$U_D = \frac{4I_1 r}{3}.$$

3. Диод открыт ($I_0 > I_1$). Теперь $U_{LT} = U_D$ при любом токе через диод (рис. 2). Неизвестные токи выразим через одно неизвестное I_{A2}, пользуясь законом Ома и правилами Кирхгофа:

- путь $L \to M \to T$ (напряжение U_D): $I_{A1} r + I_{A2} r = U_D$, отсюда $I_{A1} = \dfrac{U_D}{r} - I_{A2}$;
- узел M (втекает I_{A1}, вытекают I_{A2} и I_{A4}): $I_{A4} = I_{A1} - I_{A2} = \dfrac{U_D}{r} - 2I_{A2}$;
- узел P (втекают I_{A3} и I_{A4}, уходит I_0 в источник): $I_{A3} = I_0 - I_{A4} =$

$I_0 - \dfrac{U_D}{r} + 2I_{A2}$;

- пути $M \to P$ напрямую и через T имеют одно напряжение: $I_{A4}r = I_{A2}r + I_{A3}r$.

Подставим в последнее:

$$\frac{U_D}{r} - 2I_{A2} = I_{A2} + I_0 - \frac{U_D}{r} + 2I_{A2} \quad \Longrightarrow \quad I_{A2} = \frac{2U_D}{5r} - \frac{I_0}{5} = \frac{8I_1}{15} - \frac{I_0}{5}.$$

Применимость: диод открыт, пока ток через него в прямом направлении: $I_D = I_0 - I_{A1} = \frac{4}{5}(I_0 - I_1) \geqslant 0$ — выполнено при всех $I_0 \geqslant I_1$, режим выбран верно.

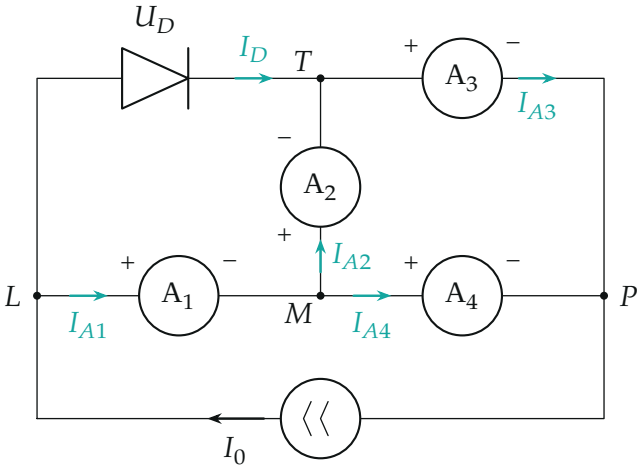


Рис. 2. Диод открыт: напряжение на нём $U_D = 4I_1r/3$ при любом токе I_D. Стрелки — положительные направления токов.

Проверим заодно пункт 1 по открытому режиму: $I_{A4} = \dfrac{U_D}{r} - 2I_{A2} = \dfrac{4I_1}{15} + \dfrac{2I_0}{5}$. При $I_0 = I_1$ это $\dfrac{2I_1}{3}$, наклон после излома $\dfrac{2}{5} < \dfrac{2}{3}$ — ровно график в). Для сравнения: $I_{A1} = \dfrac{4I_1}{5} + \dfrac{I_0}{5}$ (в точке излома I_1), $I_{A3} = \dfrac{3I_0}{5} - \dfrac{4I_1}{15}$ (в точке излома $\dfrac{I_1}{3}$) — ни один не проходит через $\left(I_1;\ \dfrac{2I_1}{3}\right)$. Все четыре зависимости — на рис. 3.

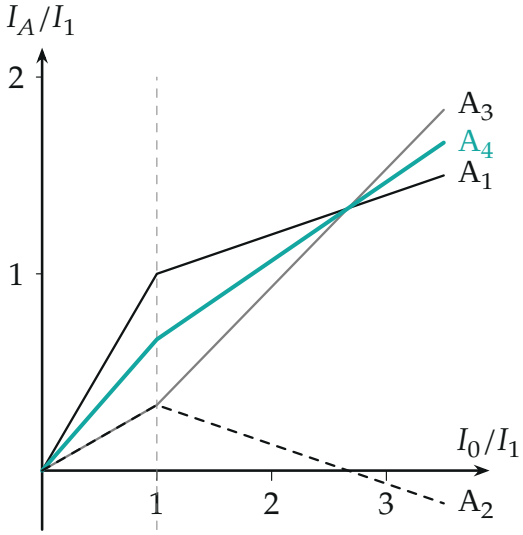


Рис. 3. Показания всех амперметров (по формулам шагов 1 и 3). Излом в точке $(I_1;\, 2I_1/3)$ — только у A_4 (бирюзовый).

Пункт 2. Когда ток через A_2 равен нулю. При закрытом диоде $I_{A2} = I_0/3 \neq 0$, значит, только при открытом. Из шага 3:

$$\frac{8I_1}{15} - \frac{I_0}{5} = 0 \quad \Longrightarrow \quad I_0 = \frac{8I_1}{3}.$$

Второй способ. Если через A_2 ток не идёт, напряжения на A_3 и A_4 равны (узлы M и T при одном потенциале), токи в них тоже: $I_{A3} = I_{A4} = I_0/2$. Ток через A_1 тогда тоже $I_{A4} = I_0/2$, а напряжение на диоде равно напряжению на A_1: $U_D = \dfrac{I_0}{2}\, r = \dfrac{4I_1 r}{3}$, то есть $I_0 = \dfrac{8I_1}{3}$ — совпало.

Пункт 3. График $I_{A2}(I_0)$. Он состоит из двух отрезков прямых (рис. 4):

$$I_{A2} = \begin{cases} \dfrac{I_0}{3}, & 0 \leqslant I_0 \leqslant I_1, \\ \dfrac{8I_1}{15} - \dfrac{I_0}{5}, & I_0 \geqslant I_1. \end{cases}$$

Характерные точки: $(0;\, 0)$, излом $\left(I_1;\, \dfrac{I_1}{3}\right)$ (обе формулы дают $I_1/3$ —

график непрерывен), ноль $\left(\frac{8I_1}{3};\ 0\right)$. Дальше показание отрицательное: ток через A_2 идёт сверху вниз, от T к M — открытый диод «перекачивает» ток в верхнюю ветвь.

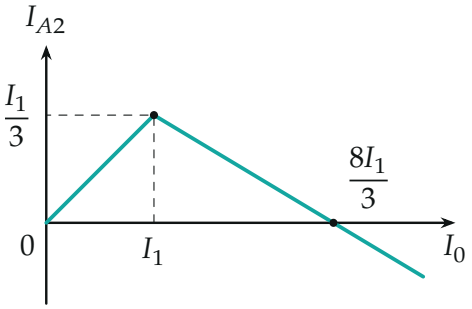


Рис. 4. Показания амперметра A_2: растут, пока диод закрыт, после его открытия убывают линейно и при $I_0 = 8I_1/3$ меняют знак.

Обратите внимание. После открытия диода напряжение на нём фиксировано, но ток через него — нет: диод в этом режиме ведёт себя как батарейка с ЭДС U_D и нулевым внутренним сопротивлением, а не как разрыв и не как перемычка.

Ответ: 1) A_4; 2) $I_0 = \frac{8I_1}{3}$; 3) ломаная через $(0;\ 0)$, $\left(I_1;\ \frac{I_1}{3}\right)$, $\left(\frac{8I_1}{3};\ 0\right)$, дальше — отрицательные значения с тем же наклоном $-\frac{1}{5}$.

Проверка. Размерность — токи через токи. Сумма токов в узле P при открытом диоде: $I_{A3} + I_{A4} = \left(\frac{3I_0}{5} - \frac{4I_1}{15}\right) + \left(\frac{2I_0}{5} + \frac{4I_1}{15}\right) = I_0$ — верно. При $I_0 = I_1$ все токи открытого режима совпадают с токами закрытого — переход непрерывный, как и должно быть. Пункт 2 получен двумя способами.

Смысл: открытый диод держит постоянное напряжение между узлами L и T, поэтому весь прирост тока источника идёт мимо A_2, а через него ток только убывает.

Ответ. 1) A_4; 2) $I_0 = \frac{8I_1}{3}$; 3) $I_{A2} = I_0/3$ при $I_0 < I_1$ и $I_{A2} = \frac{8I_1}{15} - \frac{I_0}{5}$ при $I_0 > I_1$: ломаная через точки $(0;\ 0)$, $(I_1;\ I_1/3)$, $(8I_1/3;\ 0)$ (рис. 4).