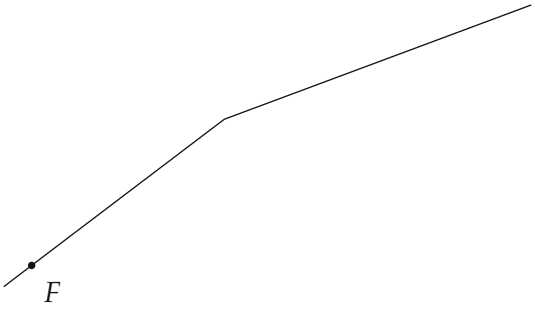
В фокусе внимания

Задача 5. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 10 класс, задача 5] «В фокусе внимания».

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертёж оптической схемы, на котором были изображены тонкая линза, её фокусы и луч, проходящий через один из фокусов. От времени чернила выцвели, и на чертеже остались видны только луч и фокус F, через который он проходил.



Найдите построением с помощью циркуля и линейки (без делений) положение линзы.

На двух отдельных листах приведены в увеличенном масштабе четыре экземпляра чертежа. Все построения выполняйте на этих листах. Описывать метод построения параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам и подобные стандартные геометрические процедуры не обязательно.

Примечание: При построении данного чертежа Снеллиус предполагал, что данная линза **любые** лучи (даже непараксиальные) преломляет по тем же правилам, что и параксиальные. Параксиальный луч — это луч, идущий под малым углом к главной оптической оси линзы и на малом расстоянии от неё.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на построение в тонкой линзе: известны точка на главной оптической оси (фокус F) и один луч до и после преломления. Излом луча — точка K — лежит на линзе. Линза может быть собирающей или рассеивающей, разберём оба случая. Главная идея — узнать, куда идёт луч, прошедший через фокус, и превратить это в геометрическое место точек для оптического центра O.

Обозначения. K — точка излома луча (точка преломления); O — оптический центр; f — фокусное расстояние; F' — второй фокус; ℓ — прямая преломлённого луча.

1. Собирающая линза. Луч, прошедший через передний фокус собирающей линзы, после неё идёт параллельно главной оптической оси. Значит, ось — прямая через F, параллельная преломлённому лучу. Плоскость линзы перпендикулярна оси и проходит через K; O — основание перпендикуляра из K на ось, второй фокус F' — на оси по другую сторону от O, $OF' = OF$ (рис. 1).

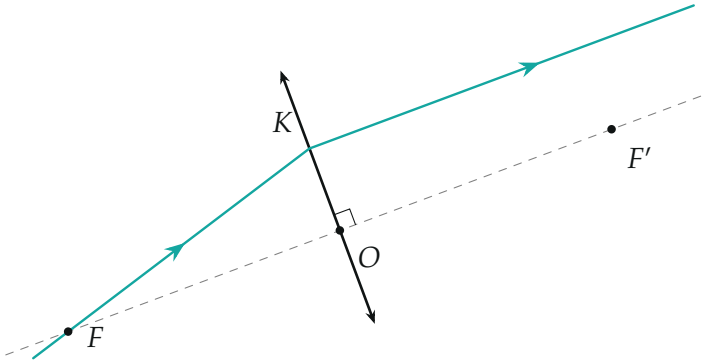


Рис. 1. Собирающая линза: ось — через F параллельно преломлённому лучу, линза — перпендикуляр к оси через точку излома K.

2. Куда идёт луч через фокус рассеивающей линзы. Точка F — предмет на главной оси на расстоянии $a = f$ перед рассеивающей линзой (оптическая сила $-1/f$). Формула тонкой линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{b} = -\frac{1}{f} - \frac{1}{f} = -\frac{2}{f}, \qquad b = -\frac{f}{2}.$$

Изображение мнимое, на расстоянии $f/2$ перед линзой: преломлённый луч идёт так, будто вышел из середины N отрезка FO. Второй способ — через углы. Луч падает на линзу на высоте h под углом β к оси, $\operatorname{tg}\beta = h/f$; рассеивающая линза увеличивает тангенс наклона на h/f: $\operatorname{tg}\beta' = \dfrac{h}{f} + \dfrac{h}{f} = \dfrac{2h}{f}$, и продолжение назад пересекает ось на расстоянии $h/\operatorname{tg}\beta' = f/2$ от O — то же самое.

3. Два геометрических места для O.

- Ось FO перпендикулярна плоскости линзы OK, угол FOK прямой. Значит, O лежит на окружности с диаметром FK.
- Середина N отрезка FO лежит на прямой ℓ (продолжение преломлённого луча назад). Тогда O — образ точки N при растяжении в 2 раза от точки F: O лежит на прямой ℓ', параллельной ℓ и вдвое дальше от F, чем ℓ.

Построение (рис. 2): окружность на диаметре FK; перпендикуляр из F на ℓ длиной a продолжаем ещё на a; через его конец — прямая $\ell' \parallel \ell$. Её точки пересечения с окружностью — оптические центры. На нашем чертеже пересечений два: O_1 и O_2.

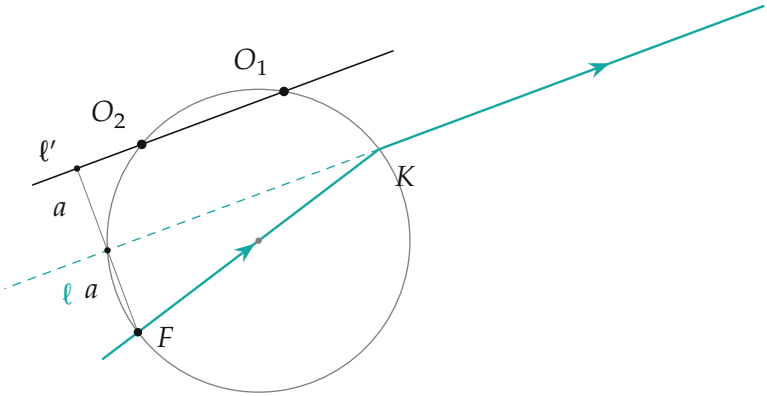


Рис. 2. Построение для рассеивающей линзы: окружность с диаметром FK и прямая ℓ', параллельная продолжению ℓ преломлённого луча и вдвое дальше от F. Два пересечения — два возможных оптических центра.

4. Положение линзы. Для каждого центра плоскость линзы — прямая O_iK, главная ось — FO_i, второй фокус F' — на оси за O_i на расстоянии FO_i (рис. 3 и 4). На обоих рисунках продолжение преломлённого луча назад проходит через середину N отрезка FO_i — построение верно. Проверка расчётом (python): для обоих центров ход луча по формуле $\operatorname{tg}\beta' = \operatorname{tg}\beta + h/f$ даёт направление преломлённого луча, совпадающее с нарисованным.

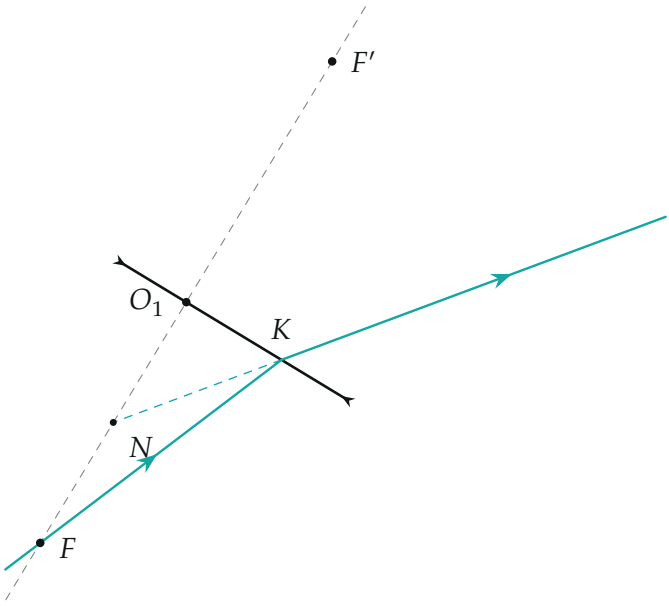


Рис. 3. Рассеивающая линза с центром O_1; угол луча с осью $\beta_1 \approx 22°$.

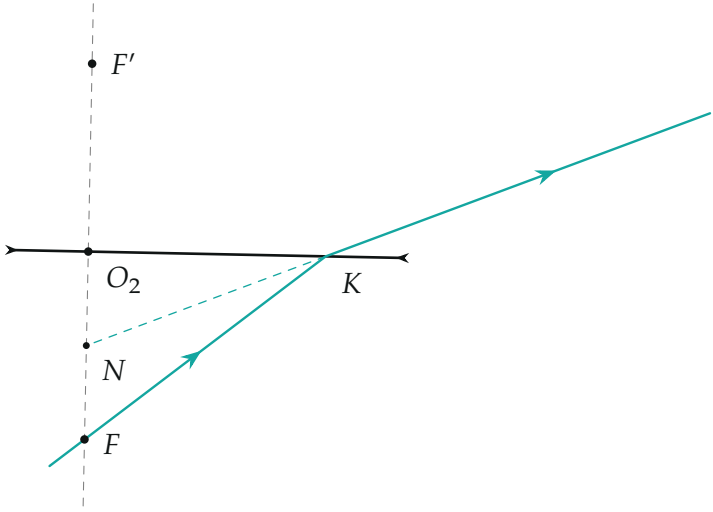


Рис. 4. Рассеивающая линза с центром O_2; угол луча с осью $\beta_2 \approx 52°$.

5. Почему рассеивающих решений два и как они связаны. Пусть γ — угол, на который луч отклонился в линзе (он виден на чертеже). Из

шага 2: $\operatorname{tg}\beta' = 2\operatorname{tg}\beta$, а $\gamma = \beta' - \beta$. Обозначим $t = \operatorname{tg}\beta$:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2t - t}{1 + 2t^2} = \frac{t}{1 + 2t^2} \quad \Longrightarrow \quad 2t^2 \operatorname{tg}\gamma - t + \operatorname{tg}\gamma = 0.$$

Квадратное уравнение: два корня, и по теореме Виета $t_1 t_2 = \dfrac{\operatorname{tg}\gamma}{2\operatorname{tg}\gamma} = \dfrac{1}{2}$, то есть $\operatorname{tg}\beta_1 \cdot \operatorname{tg}\beta_2 = \dfrac{1}{2}$. На нашем чертеже $\gamma \approx 16{,}8°$, $\operatorname{tg}\gamma \approx 0{,}301$, корни $t_1 \approx 0{,}395$ и $t_2 \approx 1{,}264$ — это ровно найденные построением O_1 и O_2. Решения существуют, пока дискриминант $1 - 8\operatorname{tg}^2\gamma \geqslant 0$, то есть $\operatorname{tg}\gamma \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ (прямая ℓ' пересекает окружность).

Раз $\operatorname{tg}\beta_1 \operatorname{tg}\beta_2 = \frac{1}{2}$, оба угла не могут быть малыми: если один луч параксиальный, другой — точно нет. Поэтому оба рассеивающих решения законны только благодаря примечанию условия: линза Снеллиуса преломляет любые лучи по правилам параксиальных.

Обратите внимание. Для рассеивающей линзы луч через фокус *не* становится параллельным оси — это свойство собирающей линзы. Параллельно оси после рассеивающей линзы идёт луч, направленный в её *задний* фокус, а через передний фокус луч выходит так, будто шёл из точки $f/2$.

Ответ: собирающая линза — одно решение (рис. 1): ось через F параллельно преломлённому лучу, линза — перпендикуляр к ней через точку излома K. Рассеивающая — два решения (рис. 3, 4): центр $O_{1,2}$ — пересечения окружности с диаметром FK и прямой, параллельной продолжению преломлённого луча и вдвое дальше от F; линза — прямая $O_{1,2}K$.

Проверка. В каждом из трёх построений угол FOK прямой, а ход луча, рассчитанный по правилам тонкой линзы для найденных O и f, совпал с лучом чертежа (python, совпадение направления до 10^{-15}). Связь $\operatorname{tg}\beta_1 \operatorname{tg}\beta_2 = \frac{1}{2}$ выполнена: $0{,}3955 \cdot 1{,}2643 = 0{,}5000$.

Смысл: один луч и одна точка фокуса не задают линзу однозначно — нужно ещё знать её тип, а для рассеивающей остаётся выбор из двух.

Ответ. Собирающая линза: главная оптическая ось проходит через F

параллельно преломлённому лучу, плоскость линзы — перпендикуляр к ней через точку преломления K. Рассеивающая линза: два решения — оптический центр O_1 или O_2 — пересечения окружности с диаметром FK с прямой, параллельной продолжению преломлённого луча и вдвое дальше от F, чем это продолжение; плоскость линзы проходит через K и найденный центр. Построения — на рис. 1–4.