Надувательство

Задача 1. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 11 класс, практический тур, задача 1] «Надувательство».

Теоретическая справка. Если в эластичной трубке создать избыточное к внешнему давление, то её внутренний объём увеличится. При этом изменится и площадь сечения трубки, и её длина. В данной задаче речь пойдёт именно об изменении внутреннего сечения трубки.

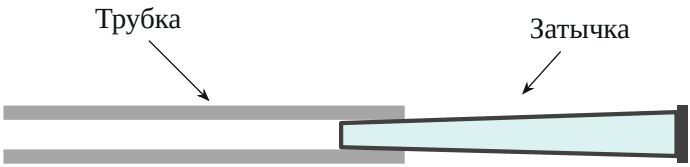
Введём количественное описание этого явления. Площадь внутреннего сечения трубки S зависит от разности давлений $\Delta p = p - p_0$ внутри и снаружи трубки. В первом приближении данная зависимость описывается линейной функцией:

$$\frac{\Delta S}{S_0} = \alpha\, \Delta p,$$

где S_0 — площадь внутреннего сечения трубки при атмосферном давлении p_0, α — коэффициент, характеризующий упругие свойства трубки.

1. Определите площадь поперечного сечения трубки при атмосферном давлении с точностью не хуже 5 %. Оцените погрешность измерения.
2. Определите коэффициент α, используя графическую обработку данных. Измерения проведите в диапазоне разницы давлений от 0 до не менее чем $1{,}0 \cdot 10^5$ Па, сняв не менее 5 экспериментальных точек, не включая точку с нулевым избыточным давлением.

Атмосферное давление примите равным $p_0 = 100$ кПа. Оборудование: силиконовая трубка, шприц объёмом 10 мл, затычка для трубки (чехол для иглы шприца, см. рисунок), скотч, мерная лента или рулетка, вода, салфетки для поддержания рабочего места в чистоте, миллиметровая бумага для построения графика.



▲ **Решение. Что происходит.** Измерять напрямую ни сечение, ни давление нечем, поэтому оба считаем через длины. Сечение — это объём воды из шприца, делённый на длину её столбика. При повышении давления трубка раздувается, а объём воды не меняется — столбик воды укорачивается, и по его длине находим $\Delta S/S_0$. Давление измеряет «манометр» — столбик воздуха, запертый между затычкой и водой: он сжимается изотермически, и по закону Бойля–Мариотта даёт p. Главная тонкость — в запертом воздухе трубка тоже раздута, и это надо учесть.

Обозначения. x_1, x_2 — координаты ближнего к шприцу и дальнего краёв столбика воды по мерной ленте, x_{10}, x_{20} — они же при атмосферном давлении; $L = x_2 - x_1$ — длина столбика воды, $L_0 = x_{20} - x_{10}$; l_0 — длина запертого воздуха в начале, $l = l_0 - (x_2 - x_{20})$ — при давлении p; $s = \Delta S/S_0$.

Пункт 1. Сечение трубки. Погружаем свободный конец трубки в воду и набираем шприцем $V_0 = (7{,}0 \pm 0{,}2)$ мл воды. Трубку кладём горизонтально (иначе вес столбика добавит давление) и измеряем длину столбика $h_0 = (97{,}1 \pm 0{,}2)$ см. Длинный столбик выгоден: погрешность длины в миллиметр от сотни сантиметров даёт лишь 0,1 %.

$$S_0 = \frac{V_0}{h_0} = \frac{7{,}0\ \text{см}^3}{97{,}1\ \text{см}} = 0{,}0721\ \text{см}^2.$$

Относительные погрешности складываются; погрешность объёма много больше:

$$\frac{\sigma_{S_0}}{S_0} = \frac{\sigma_{V_0}}{V_0} + \frac{\sigma_{h_0}}{h_0} = \frac{0{,}2}{7{,}0} + \frac{0{,}2}{97{,}1} \approx 2{,}9\ \% + 0{,}2\ \% \approx 3\ \%,$$

$$S_0 = (0{,}072 \pm 0{,}002)\ \text{см}^2,$$

что лучше требуемых 5 %.

Пункт 2. Установка. Набираем в трубку около 4 мл воды и шприцем сдвигаем столбик так, чтобы от его края до свободного конца было примерно столько же, сколько длина столбика. Вставляем в свободный конец затычку, отключаем шприц (давление внутри атмосферное) и измеряем запертый столбик воздуха: $l_0 = (40{,}2 \pm 0{,}1)$ см. Трубку распрям-

ляем на мерной ленте, приклеиваем скотчем и снова подключаем шприц. Нажимая на поршень, повышаем давление и записываем x_1 и x_2.

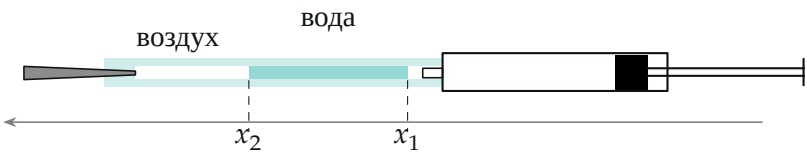


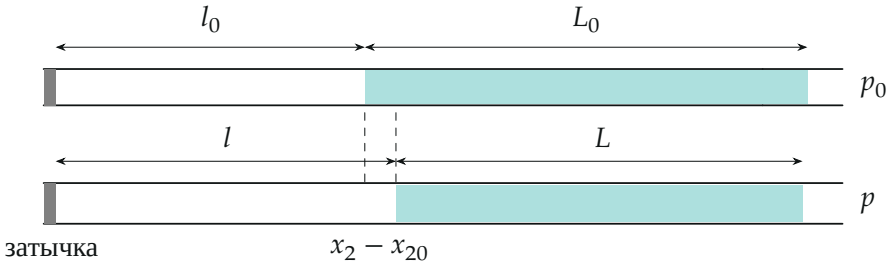
Схема установки: слева затычка, справа шприц, трубка лежит на мерной ленте (ось направлена от шприца к затычке)

Связь $\Delta S/S_0$ с длинами. Объём воды в трубке не меняется:

$$L_0 S_0 = L\, S_0(1+s) \quad \Rightarrow \quad s = \frac{\Delta S}{S_0} = \frac{L_0}{L} - 1.$$

Давление. Запертый воздух сжимается медленно, при комнатной температуре — изотермически. Закон Бойля–Мариотта для запертого воздуха между началом и текущим состоянием, причём сечение в нём тоже $S_0(1+s)$ — давление по всей трубке одно:

$$p_0\, l_0 S_0 = p\, l\, S_0(1+s) \quad \Rightarrow \quad \Delta p = p - p_0 = p_0 \left(\frac{l_0}{l} \cdot \frac{L}{L_0} - 1 \right).$$



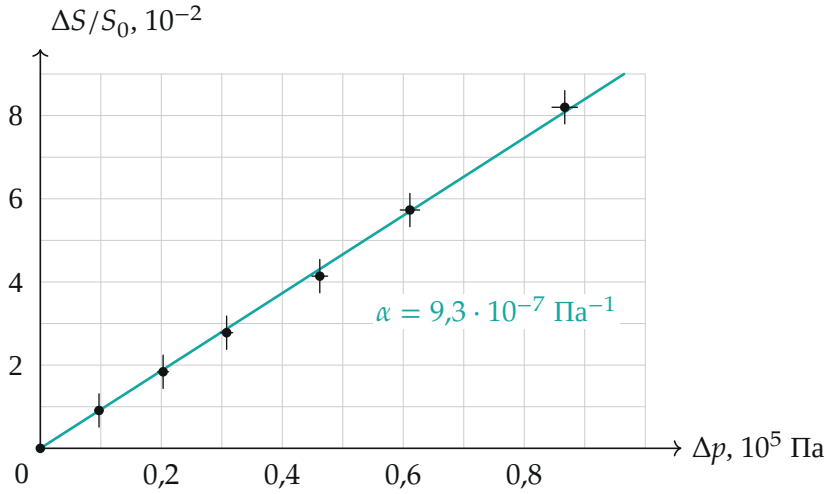
Трубка до и после нажатия (вид от затычки, сечение и сдвиги для наглядности преувеличены): воздух сжимается на $x_2 - x_{20}$, столбик воды укорачивается, трубка раздувается

Обратите внимание: множитель $L/L_0 = 1/(1+s)$ в формуле давления — это раздутие трубки в запертом воздухе; без него Δp и α получаются заметно иными (на 14 %).

Обработка. По измеренным x_1, x_2 ($x_{10} = 4{,}8$ см, $x_{20} = 60{,}2$ см, $L_0 = 55{,}4$ см) считаем по этим формулам (python):

x_1, см	x_2, см	L, см	Δp, 10^5 Па	$\sigma_{\Delta p}$, 10^5 Па	s, 10^{-2}
4,8	60,2	55,4	0	0	0
9,2	64,1	54,9	0,097	0,007	0,91
13,2	67,6	54,4	0,203	0,009	1,84
16,6	70,5	53,9	0,308	0,010	2,78
20,8	74,0	53,2	0,462	0,013	4,14
24,4	76,8	52,4	0,611	0,016	5,73
29,3	80,5	51,2	0,867	0,021	8,20

Погрешности: координаты — половина цены деления ленты $\sigma_x = 0{,}05$ см, l_0 — 0,1 см. В s входят четыре координаты, поэтому $\sigma_s \approx 4\sigma_x/L_0 \approx 0{,}4 \cdot 10^{-2}$; $\sigma_{\Delta p}$ — сумма вкладов всех пяти измеренных длин (последний столбец таблицы).



$\Delta S/S_0$ от Δp с крестами погрешностей; прямая через начало координат — метод наименьших квадратов

Коэффициент α. Точки ложатся на прямую через начало координат, как и требует линейная модель. Её наклон по методу наименьших квадратов

$$\alpha = \frac{\sum s_i \Delta p_i}{\sum \Delta p_i^2} = 9{,}32 \cdot \frac{10^{-2}}{10^5\ \text{Па}} = 9{,}3 \cdot 10^{-7}\ \text{Па}^{-1}.$$

Погрешность наклона при $\sigma_s = 0{,}4 \cdot 10^{-2}$ на точку: $\sigma_\alpha \approx \sigma_s / \sqrt{\sum \Delta p_i^2} \approx 0{,}3 \cdot 10^{-7}\ \text{Па}^{-1}$, с учётом погрешностей давления (около 2–3 %) — $0{,}4 \cdot 10^{-7}\ \text{Па}^{-1}$:

$$\alpha = (9{,}3 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-7}\ \text{Па}^{-1}, \qquad \varepsilon_\alpha \approx 4\ \%.$$

Если не учитывать раздутие трубки в запертом воздухе, по тем же данным выходит $8{,}1 \cdot 10^{-7}\ \text{Па}^{-1}$ — на 14 % меньше, это далеко за погрешностью. У организаторов в ответе $(6{,}8 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-7}\ \text{Па}^{-1}$: их таблица посчитана не по их же формулам (вместо $L_0/L - 1$ взято $1 - L/L_0$, а множитель L/L_0 в давлении заменён на обратный); по формулам решения из тех же x_1, x_2 получаются числа нашей таблицы. Заметим ещё, что при таких данных наибольшее давление $0{,}87 \cdot 10^5$ Па, а условие просит дойти до $1{,}0 \cdot 10^5$ Па — нужно было сильнее сжать воздух.

Проверка. Размерность: $\Delta S/S_0$ безразмерно, α — Па^{-1}. Порядок величины: при перепаде в одну атмосферу сечение растёт на 9 %, то есть радиус — на 4 %; для мягкой силиконовой трубки это разумно. Второй способ проверить давление: последняя точка — воздух сжат по длине с 40,2 до 19,9 см, без раздутия давление выросло бы в 2,02 раза; раздутие сечения на 8,2 % увеличивает объём воздуха, и давление $p = 2{,}02 p_0 / 1{,}082 = 1{,}87 p_0$ — как в таблице.

Ответ. 1) $S_0 = V_0/h_0 = (0{,}072 \pm 0{,}002)$ см^2; 2) $\alpha = (9{,}3 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-7}\ \text{Па}^{-1}$ (по данным измерений организаторов; у них в ответе $6{,}8 \cdot 10^{-7}\ \text{Па}^{-1}$ из-за ошибки пересчёта таблицы).