Источник и конденсатор

Задача 2. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 11 класс, задача 2 (практический тур)] «Источник и конденсатор».

Оборудование. Источник питания с неизвестными значениями ЭДС и внутреннего сопротивления, «серый ящик» с конденсатором и подключённым последовательно сопротивлением, мультиметр с щупами (может быть использован исключительно в режиме вольтметра), секундомер. Сопротивление резистора в сером ящике равно внутреннему сопротивлению источника. Внутреннее сопротивление мультиметра на всех диапазонах измерения напряжения известно (1 МОм).

1. Определите значение ЭДС, а также внутреннего сопротивления источника питания.
2. Определите электрическую ёмкость конденсатора.

В данной работе погрешность оценивать не нужно!

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на RC-цепь: заряд и разряд конденсатора через резисторы идут по экспоненте с характерным временем $\tau = RC$, где R — полное сопротивление петли. Вольтметр здесь — не только измеритель, но и резистор $R_V = 1$ МОм в цепи, и он сравним с сопротивлением источника. Главная идея: при заряде ток идёт через r источника, r ящика и R_V, при разряде — через r ящика и R_V. Два времени дают отношение r/R_V, а одно показание вольтметра на источнике — ЭДС. Числа ниже — из авторской установки организаторов.

Обозначения. U_0 — ЭДС источника, r — его внутреннее сопротивление (и резистор ящика), $R_V = 1$ МОм, C — ёмкость; τ_1 — время заряда, τ_2 — время разряда; q — заряд конденсатора, I — ток.

1. Заряд конденсатора. Соединяем последовательно источник, ящик и вольтметр (рис. 1), конденсатор вначале разряжен. Закон Ома для полной цепи (сумма напряжений по петле равна ЭДС) в произвольный момент:

$$I\,(2r + R_V) + \frac{q}{C} = U_0, \qquad I = \frac{dq}{dt}.$$

Решение с $q(0) = 0$: $q = CU_0\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right)$, $\tau_1 = C(2r + R_V)$. Вольтметр

показывает напряжение на себе, $U_V = IR_V$:

$$U_V = \frac{U_0 R_V}{2r + R_V}\, e^{-t/\tau_1}.$$

Качественно: конденсатор заряжается — напряжение на нём растёт — ток и показание вольтметра убывают к нулю.

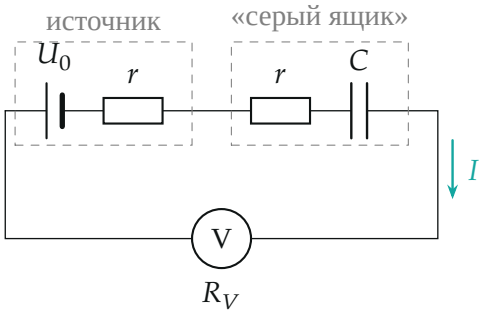

Рис. 1. Заряд: источник (U_0, r), ящик (r и C) и вольтметр R_V в одной петле; сопротивление петли $2r + R_V$.

2. Как измерить τ без знания начала отсчёта. Отношение показаний в моменты, разделённые Δt, не зависит ни от амплитуды, ни от момента включения:

$$\frac{U_1}{U_2} = e^{\Delta t/\tau} \quad \Longrightarrow \quad \tau = \frac{\Delta t}{\ln(U_1/U_2)}.$$

Поэтому секундомер запускаем, когда вольтметр проходит U_1, и останавливаем на U_2. Первые 2–3 с после включения не используем — цифровой прибор ещё не успел установиться. Перед каждым повтором конденсатор разряжаем, замкнув его выводы. Результаты (каждая строка — среднее из 5–6 повторов):

U_1, В	U_2, В	$\Delta t_{\text{ср}}$, с	$\ln(U_1/U_2)$	τ_1, с
1,5	0,5	20,79	1,099	18,92
1,6	0,8	13,12	0,693	18,93
1,6	0,4	25,82	1,386	18,63

Среднее $\tau_1 = 18{,}83$ с.

3. Разряд конденсатора. Держим ящик подключённым к источнику 1–2 минуты (конденсатор заряжается до U_0: ток прекратился), отключаем и подключаем к нему вольтметр (рис. 2). Теперь в петле только r ящика и R_V:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{(r+R_V)C}, \qquad q = CU_0\,e^{-t/\tau_2}, \qquad \tau_2 = (r+R_V)C.$$

Вольтметр показывает часть напряжения конденсатора: $U_V = \dfrac{q}{C}\cdot\dfrac{R_V}{r+R_V}$ — тоже экспонента с тем же τ_2, так что способ шага 2 работает:

U_3, В	U_4, В	$\Delta t_{\text{ср}}$, с	$\ln(U_3/U_4)$	τ_2, с
1,5	0,5	12,38	1,099	11,27
2,0	1,0	7,85	0,693	11,33
2,0	0,5	15,67	1,386	11,31

Среднее $\tau_2 = 11{,}30$ с.

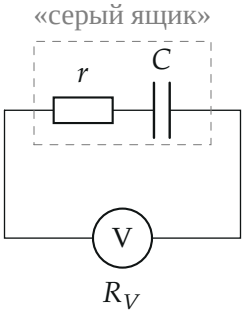

Рис. 2. Разряд: заряженный ящик замкнут на вольтметр; сопротивление петли $r + R_V$.

4. Проверка экспоненты графиком. Если зависимость действительно экспоненциальная, точки $\left(\Delta t;\ \ln\dfrac{U_1}{U_2}\right)$ лежат на прямой через начало координат с наклоном $1/\tau$ (рис. 3). Метод наименьших квадратов (пря-

мая через начало) даёт $\tau_1 = 18{,}77$ с и $\tau_2 = 11{,}30$ с — в согласии со средними.

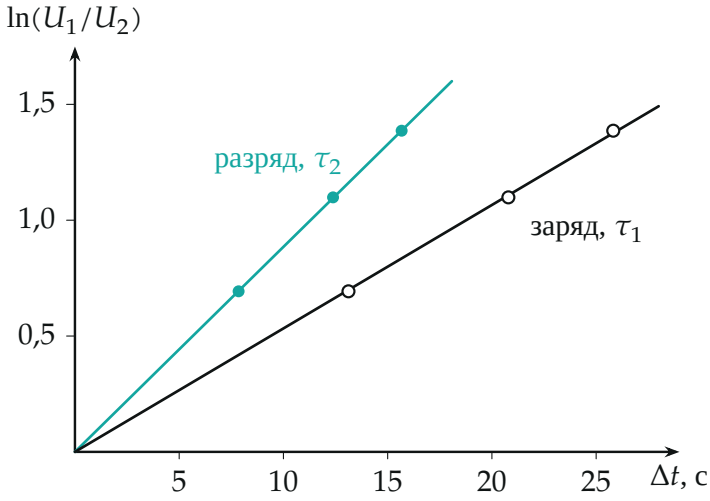

Рис. 3. Линеаризация: $\ln(U_1/U_2)$ *от* Δt*. Наклоны прямых* $1/\tau_1$ *(заряд, светлые точки) и* $1/\tau_2$ *(разряд, бирюзовые).*

5. Пункт 1 — внутреннее сопротивление. Делим времена — ёмкость сокращается:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{2r + R_V}{r + R_V} = 1{,}666.$$

Обозначим $x = r/R_V$: $\dfrac{2x+1}{x+1} = 1{,}666$, откуда

$$x = \frac{\tau_1/\tau_2 - 1}{2 - \tau_1/\tau_2} = \frac{0{,}666}{0{,}334} \approx 2{,}0, \qquad r \approx 2{,}0 \text{ МОм}.$$

6. Пункт 1 — ЭДС. Подключаем вольтметр прямо к источнику (рис. 4). В петле r и R_V, вольтметр показывает

$$U_V = U_0 \frac{R_V}{R_V + r} = 3{,}24 \text{ В},$$

$$U_0 = U_V \frac{R_V + r}{R_V} = 3{,}24 \cdot 3{,}0\ \text{В} \approx 9{,}7\ \text{В}.$$

Вольтметр показывает втрое меньше ЭДС — у источника сопротивление вдвое больше, чем у вольтметра.

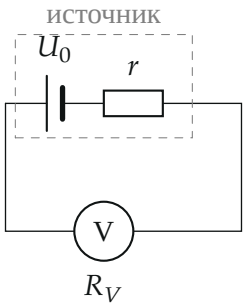

Рис. 4. Вольтметр на источнике: показание $U_0 R_V/(R_V + r)$, а не ЭДС.

7. Пункт 2 — ёмкость. Из любого из времён:

$$C = \frac{\tau_1}{2r + R_V} = \frac{18{,}83\ \text{с}}{5{,}0\ \text{МОм}} \approx 3{,}77\ \text{мкФ},$$

$$C = \frac{\tau_2}{r + R_V} = \frac{11{,}30\ \text{с}}{3{,}0\ \text{МОм}} \approx 3{,}77\ \text{мкФ}.$$

Два значения совпадают — так и должно быть, ведь r найдено из их отношения.

8. Согласованность с измерениями. С найденными U_0, r, C начальное показание при заряде $\frac{U_0 R_V}{2r+R_V} = 1{,}94$ В, при разряде $\frac{U_0 R_V}{r+R_V} = 3{,}24$ В. Выбранные пороги ($U_1 \leqslant 1{,}6$ В, $U_3 \leqslant 2{,}0$ В) ниже начальных — они достигаются через несколько секунд после включения, когда показания прибора уже установились. Расчётные кривые — на рис. 5.

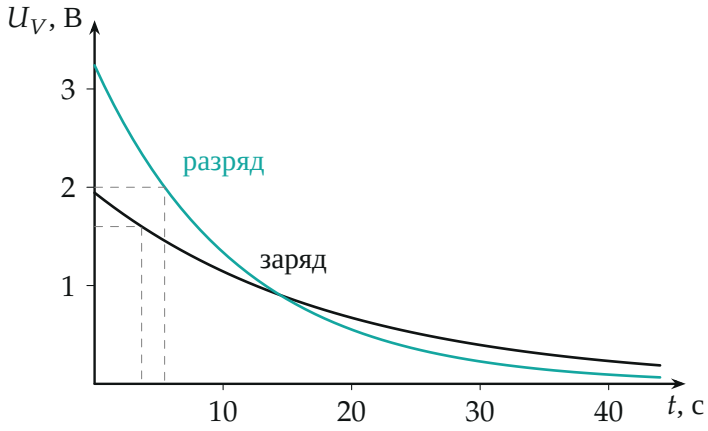

Рис. 5. Расчётные показания вольтметра при заряде ($1{,}94\,e^{-t/18{,}8}$ В) и разряде ($3{,}24\,e^{-t/11{,}3}$ В). Пунктир — моменты, когда достигаются пороги 1,6 В и 2,0 В: через 3,7 и 5,5 с.

Обратите внимание. При заряде вольтметр показывает напряжение на *себе*, $U_V = IR_V = \dfrac{U_0 R_V}{2r + R_V} e^{-t/\tau_1}$, а не $\dfrac{U_0 R_V}{r + R_V} e^{-t/\tau_1}$, как напечатано у организаторов, — это опечатка, на τ_1 она не влияет (амплитуда сокращается в отношении U_1/U_2).

Ответ: 1) $r = R_V \dfrac{\tau_1/\tau_2 - 1}{2 - \tau_1/\tau_2} \approx 2{,}0$ МОм, $U_0 = U_V \dfrac{R_V + r}{R_V} \approx 9{,}7$ В; 2) $C = \dfrac{\tau_1}{2r + R_V} \approx 3{,}8$ мкФ.

Проверка. Размерность: с/Ом = Ф. Предел $r \to 0$: $\tau_1/\tau_2 \to 1$ — заряд и разряд шли бы через одно и то же сопротивление R_V, верно. Предел $r \gg R_V$: $\tau_1/\tau_2 \to 2$ — в петле заряда два одинаковых больших резистора, в петле разряда один. Наше 1,67 — между пределами.

Смысл: вольтметр с конечным сопротивлением — полноправный элемент цепи; именно поэтому из времён заряда и разряда удаётся «вытащить» внутреннее сопротивление источника.

Ответ. 1) $U_0 \approx 9{,}7$ В, $r \approx 2{,}0$ МОм; 2) $C \approx 3{,}8$ мкФ.