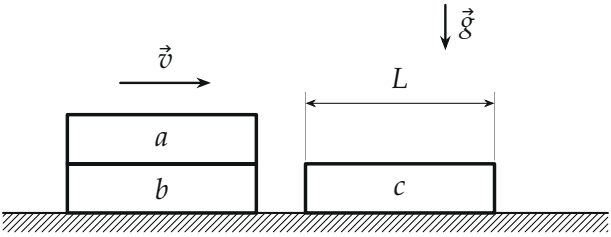
Вспоминая 90-е

Задача 1. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 11 класс, задача 1] «Вспоминая 90-е».

Вспоминая 1998 год, теоретик Баг продолжил исследования следующей ситуации: Доска a лежит на такой же доске b. Они, как единое целое, движутся с некоторой скоростью по гладкой горизонтальной поверхности и сталкиваются с такой же доской c, верхняя поверхность которой покрыта тонким слоем резины. Трения между досками a и b нет, а трения между досками a и c есть. При ударе доски b и c прочно сцепляются. Длина досок равна L. Доска a перестала перемещаться относительно досок b и c в момент, когда она целиком расположилась на доске c. Найдите перемещение Δx доски a от момента соударения до момента прекращения относительного движения досок.



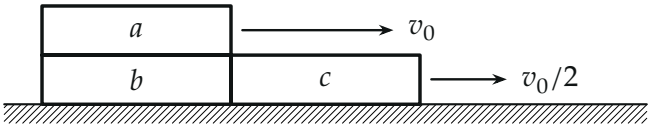
▲ **Решение.** **Что происходит.** Удар длится мгновение: доска b передаёт часть импульса доске c, а доска a трения о b не имеет и сохраняет скорость. Дальше a быстрее $b + c$ и наползает на резину доски c. Сила трения скольжения пропорциональна прижимающей силе, а та — длине перекрытия досок a и c: чем дальше a заехала, тем сильнее её тормозит. Сила, пропорциональная смещению, — это пружина, поэтому относительное движение — гармоническое колебание, и до остановки проходит четверть периода. Класс задачи — «сохранение импульса при ударе + колебания относительного смещения + движение центра масс».

Обозначения. m — масса доски, v_0 — скорость досок a и b до удара, μ — коэффициент трения a о резину (в ответ он не войдёт). Ось x — по скорости v_0. s — относительное смещение: на сколько доска a сдвинулась вперёд относительно сцепки $b+c$ после удара; это же длина перекрытия a и c.

1. Удар. За время удара горизонтальные силы между b и c огромны, а на a горизонтальных сил нет: трения a о b нет, а до c доска a ещё не доехала. Поэтому сразу после удара $v_a = v_0$. Закон сохранения импульса системы $b + c$ за время удара (внешние горизонтальные силы отсутствуют, b и c сцепились):

$$mv_0 = 2m\,v_{bc} \quad \Rightarrow \quad v_{bc} = \frac{v_0}{2}.$$

Относительная скорость a после удара $u_0 = v_0 - v_0/2 = v_0/2$.

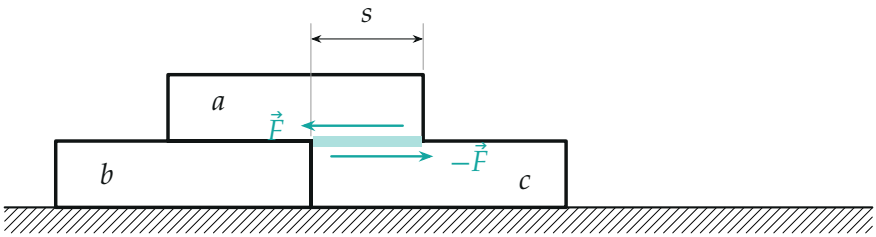


Сразу после удара: a сохранила скорость, сцепка $b + c$ едет вдвое медленнее (длины стрелок — по модулю скоростей)

2. Сила трения. Пусть a заехала на c на длину s. Доска однородна, её вес mg распределён по длине равномерно, поэтому на резину давит доля s/L веса: $N_{ac} = mg\,s/L$. Доска a скользит относительно c вперёд, значит, сила трения на a направлена назад:

$$F = \mu N_{ac} = \frac{\mu mg}{L}\,s,$$

а на сцепку $b + c$ по третьему закону Ньютона действует такая же сила вперёд.



Доска a заехала на резину на длину s (бирюзовая полоса): трение $\vec{F}$ тормозит a и разгоняет c

3. Уравнение относительного движения. Второй закон Ньютона в проекции на ось x для доски a и для сцепки $b + c$ (вертикальные силы скомпенсированы, трения a о b нет):

$$m\,a_a = -F, \qquad 2m\,a_{bc} = F.$$

Вычтем, чтобы получить ускорение относительного смещения $\ddot{s} = a_a - a_{bc}$:

$$\ddot{s} = -\frac{F}{m} - \frac{F}{2m} = -\frac{3F}{2m} = -\frac{3\mu g}{2L}\,s = -\omega^2 s, \qquad \omega = \sqrt{\frac{3\mu g}{2L}}.$$

Это уравнение гармонических колебаний. Применимо, пока a скользит вперёд относительно c ($\dot{s} > 0$): только тогда трение направлено назад и равно μN. Начальные условия $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0/2$, поэтому

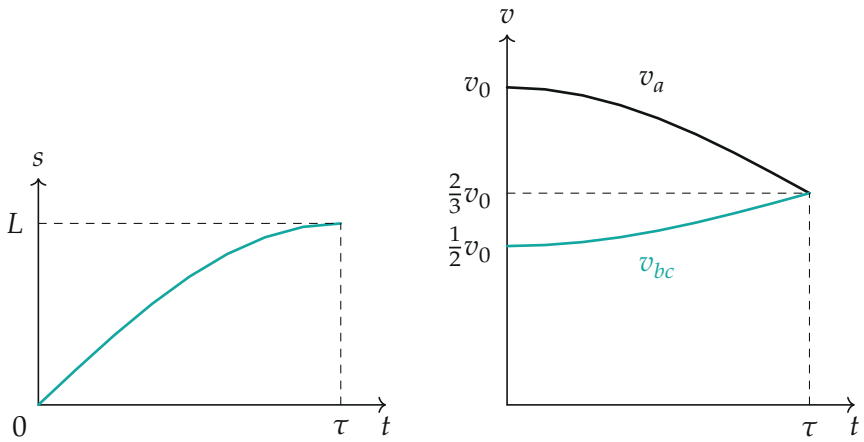
$$s(t) = \frac{v_0}{2\omega}\sin\omega t.$$

Относительная скорость $\dot{s} = \frac{v_0}{2}\cos\omega t$ обращается в ноль через четверть периода, в момент $\tau = \dfrac{\pi}{2\omega}$, когда смещение максимально: $s(\tau) = \dfrac{v_0}{2\omega}$. После этого трение покоя держит a на месте относительно c — других горизонтальных сил нет.

По условию в этот момент a целиком на c, то есть $s(\tau) = L$:

$$\frac{v_0}{2\omega} = L \quad \Rightarrow \quad v_0 = 2\omega L, \qquad v_0\tau = 2\omega L \cdot \frac{\pi}{2\omega} = \pi L.$$

Обратите внимание: ни μ, ни v_0 по отдельности не нужны — условие «остановилась ровно на c» связывает их, и в ответ входит только произведение $v_0\tau$.



Слева: перекрытие $s(t)$ — четверть синусоиды до $s = L$. Справа: скорости доски a и сцепки $b + c$ (посчитаны по $v_a = \frac{2}{3}v_0 + \frac{2}{3}\dot{s}$, $v_{bc} = \frac{2}{3}v_0 - \frac{1}{3}\dot{s}$) сходятся к скорости центра масс $\frac{2}{3}v_0$

4. Перемещение доски a через центр масс. После удара горизонтальных внешних сил нет (поверхность гладкая), поэтому центр масс трёх досок движется равномерно со скоростью

$$v_{\text{цм}} = \frac{mv_0 + 2m \cdot \frac{v_0}{2}}{3m} = \frac{2}{3}v_0, \qquad \Delta x_{\text{цм}} = \frac{2}{3}v_0\tau = \frac{2\pi L}{3}.$$

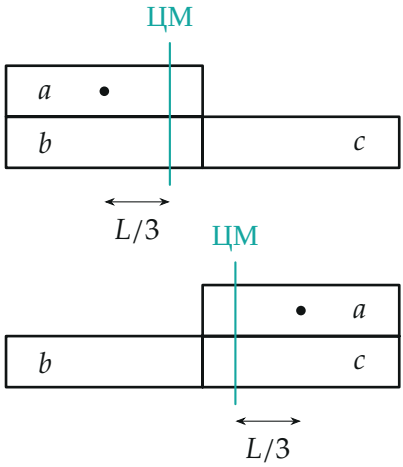
Перемещение доски a — это перемещение центра масс плюс изменение положения a относительно центра масс. Отсчитаем координаты от левого края сцепки $b+c$. В начале центр a на $L/2$, центры b и c на $L/2$ и $3L/2$; центр масс

$$x_{\text{цм}} = \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2} + \frac{3L}{2}\right) = \frac{5}{6}L$$

— на $L/3$ впереди центра a. В конце центр a на $3L/2$, и центр масс

$$x'_{\text{цм}} = \frac{1}{3}\left(\frac{3L}{2} + \frac{L}{2} + \frac{3L}{2}\right) = \frac{7}{6}L$$

— на $L/3$ позади центра a. Доска a сместилась относительно центра масс вперёд на $2L/3$.



Положение центра масс (бирюзовая черта) относительно доски a (точка — её центр) в начале и в конце

Соберём ответ:

$$\Delta x = \Delta x_{\text{цм}} + \frac{2L}{3} = \frac{2\pi L}{3} + \frac{2L}{3} = \frac{2(\pi+1)L}{3} \approx 2{,}76\,L.$$

Проверка. Размерность — длина. Второй способ — проинтегрировать скорость доски a: $v_a = v_{\text{цм}} + \frac{2}{3}\dot{s}$, откуда $\Delta x = \frac{2}{3}v_0\tau + \frac{2}{3}s(\tau) = \frac{2}{3}\pi L + \frac{2}{3}L$ — то же. Смысл: сама доска a проходит почти $3L$, хотя относительно $b + c$ сдвигается лишь на L, — всё это время система едет вперёд со скоростью центра масс.

Ответ. $\Delta x = \dfrac{2(\pi+1)L}{3} \approx 2{,}76\,L.$