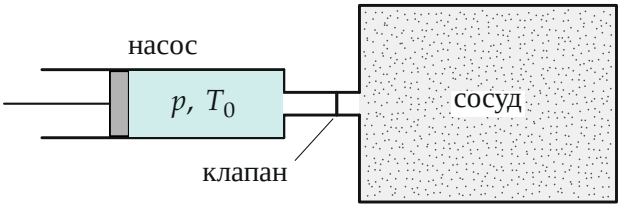
Нагревание насосом

Задача 2. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 11 класс, задача 2] «Нагревание насосом».

Сосуд с теплоизолирующими стенками заполнен атмосферным воздухом при температуре T_0 и давлении p_0. Через малый клапан в стенке сосуда с помощью насоса, соединённого с клапаном, в сосуд начинают закачивать воздух. Малая порция воздуха из атмосферы поступает в насос, сжимается, после чего в результате теплообмена с окружающей средой охлаждается до температуры T_0, при этом после охлаждения давление воздуха в насосе всегда незначительно выше, чем в сосуде. Затем открывается клапан, и порция воздуха из насоса поступает в сосуд при практически постоянных давлении и температуре, сразу после чего клапан закрывается. Воздух можно считать идеальным двухатомным газом. Теплопотерями за время, в течение которого клапан открыт, можно пренебречь. Считайте, что в процессе закачивания давление воздуха в насосе всегда больше, чем давление воздуха в сосуде, а газ, находящийся в сосуде, из него никогда не вытекает. В результате многократного повторения описанного процесса давление в сосуде повышается до p_1.

1. Во сколько раз изменилось количество вещества газа в сосуде?
2. Найдите температуру T_1 в сосуде.



Поясняющий рисунок: порция воздуха в насосе уже охлаждена до T_0, её давление чуть выше давления в сосуде

▲ **Решение. Что происходит.** Порция входит в сосуд, и поршень насоса её проталкивает: над газом совершается работа. Теплообмена в момент впуска нет, поэтому эта работа идёт во внутреннюю энергию газа в сосуде — воздух в сосуде нагревается, хотя каждая порция приходит холодной, при T_0. Класс задачи — «первое начало для наполнения сосуда»:

каждая порция приносит в сосуд не $C_V T_0$, а $C_V T_0 + RT_0 = C_p T_0$ на моль (энтальпию). Рассмотрим одну малую порцию, а потом просуммируем.

Обозначения. V — объём сосуда, ν — количество вещества в сосуде в произвольный момент, ν_0 и ν_1 — в начале и в конце, T — температура в сосуде, p — давление в сосуде (оно же почти давление в насосе при впуске). $C_V = \frac{5}{2}R$ — молярная теплоёмкость двухатомного газа при постоянном объёме. Ищем $k = \nu_1/\nu_0$.

1. Работа насоса над одной порцией. Порция $d\nu$ при давлении p и температуре T_0 занимает в насосе объём $dV_\text{н}$; по уравнению Менделеева–Клапейрона $p\,dV_\text{н} = RT_0\,d\nu$. Поршень вытесняет её в сосуд при постоянном давлении p и совершает работу

$$\delta A = p\,dV_\text{н} = RT_0\,d\nu.$$



Поршень проталкивает порцию в сосуд при постоянном давлении: работа $pS\,dx = p\,dV_н = RT_0\,d\nu$

2. Первое начало для одной порции. Система — газ в сосуде вместе с порцией $d\nu$, пока она в насосе. За время впуска теплоты нет (стенки сосуда теплоизолированы, теплопотерями при открытом клапане пренебрегаем), над системой совершена работа δA. Первое начало термодинамики: изменение внутренней энергии системы равно работе внешних сил,

$$U(\nu + d\nu) - (U(\nu) + C_V T_0\,d\nu) = RT_0\,d\nu,$$

откуда

$$dU = (C_V + R)\,T_0\,d\nu = \frac{7}{2}RT_0\,d\nu,$$

где $U = \nu C_V T$ — внутренняя энергия газа в сосуде. Применимо, потому что каждая порция до впуска уже охлаждена до T_0 — теплообмен с окружающей средой закончился раньше, чем открылся клапан.

3. Суммируем от начала до конца закачки. Правая часть содержит постоянную T_0, поэтому сумма — просто

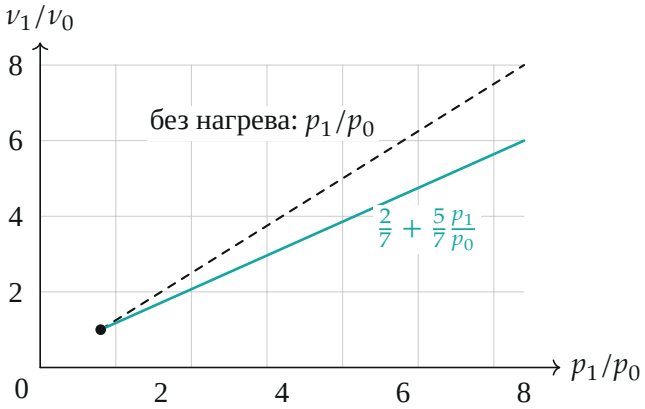
$$U_1 - U_0 = \frac{7}{2} R T_0 \, (\nu_1 - \nu_0).$$

Внутреннюю энергию газа в сосуде удобно выразить через давление: $U = \frac{5}{2}\nu RT = \frac{5}{2} pV$. Тогда

$$\frac{5}{2}(p_1 - p_0)V = \frac{7}{2} R T_0 (\nu_1 - \nu_0).$$

Поделим на уравнение состояния начального газа $p_0 V = \nu_0 R T_0$, чтобы ушли неизвестные V и T_0:

$$\frac{5}{2}\left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right) = \frac{7}{2}\,(k-1) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\nu_1}{\nu_0} = 1 + \frac{5}{7}\left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right) = \frac{2}{7} + \frac{5p_1}{7p_0}.$$



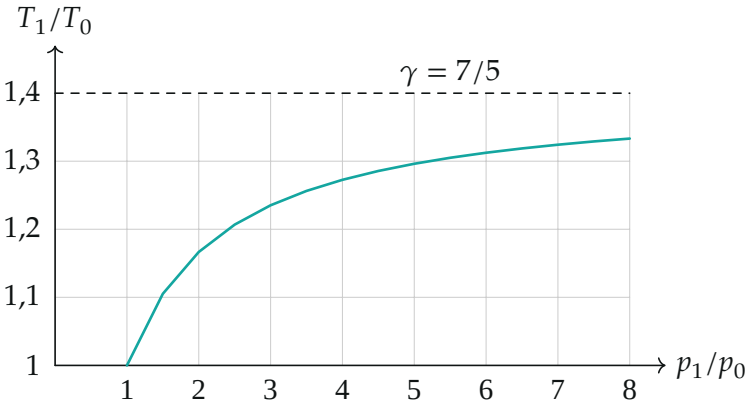
Во сколько раз выросло количество газа: прямая с наклоном $5/7$ лежит ниже изотермической (пунктир)

4. Температура. Уравнение состояния в конце $p_1 V = \nu_1 R T_1$, делим на начальное:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1/p_0}{k} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{T_0}{\frac{2p_0}{7p_1} + \frac{5}{7}} = \frac{7p_1 T_0}{2p_0 + 5p_1}.$$

Знак: $T_1 > T_0$ при $p_1 > p_0$ — газ в сосуде нагрелся, хотя ни одна порция не была горячее T_0.

Обратите внимание: порция приносит в сосуд не свою внутреннюю энергию $\frac{5}{2}RT_0$ на моль, а $\frac{7}{2}RT_0$ — лишние RT_0 это работа насоса по вталкиванию. Если её забыть, получится $T_1 = T_0$ и $k = p_1/p_0$.



Температура в сосуде от конечного давления (посчитано по ответу): при сильном накачивании $T_1 \to \frac{7}{5}T_0$

Проверка. Безразмерные ответы. Пределы: при $p_1 = p_0$ ничего не закачано — $k = 1$, $T_1 = T_0$. При $p_1 \gg p_0$ почти весь газ закачан, и каждый моль несёт $\frac{7}{2}RT_0$, а хранит $\frac{5}{2}RT_1$, откуда $T_1 \to \frac{7}{5}T_0 = \gamma T_0$ — это известный результат заполнения пустого сосуда; формула его даёт: $7p_1T_0/(5p_1)$. Второй способ для k — из уравнений состояния и найденной T_1:

$$k = \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T_1} = \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{2p_0 + 5p_1}{7p_1} = \frac{2}{7} + \frac{5p_1}{7p_0}$$

— то же. Смысл: в сосуд попадает меньше газа, чем при изотермической накачке ($k < p_1/p_0$), потому что часть давления «съедает» нагрев.

Ответ. 1) $\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{2}{7} + \frac{5p_1}{7p_0}$ (увеличилось); 2) $T_1 = \frac{7p_1T_0}{2p_0 + 5p_1} = \frac{T_0}{\frac{2p_0}{7p_1} + \frac{5}{7}}$.