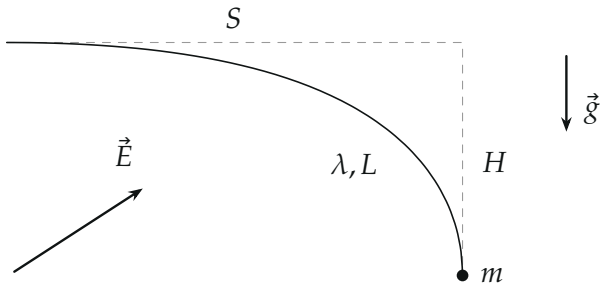
Равновесие в полях

Задача 3. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 11 класс, задача 3] «Равновесие в полях».

Нерастяжимая невесомая нить длиной L заряжена равномерно по длине положительным зарядом с линейной плотностью λ. Один конец нити закреплён, а к другому прикреплён маленький груз массой m. Систему поместили в однородное электростатическое поле. В положении равновесия система расположилась таким образом, что касательные к нити в точке крепления и в месте расположения груза оказались горизонтальной и вертикальной соответственно. Груз расположился на расстоянии H ниже и на расстоянии S правее точки крепления (см. рис). Собственным электростатическим полем зарядов нити можно пренебречь. Ускорение свободного падения равняется g. Определите величину напряжённости E электростатического поля.



▲ **Решение. Что происходит.** На нить действует поле: на каждый её кусочек длины dl — одинаковая по величине и направлению сила $\lambda\vec{E}\,dl$, как сила тяжести на тяжёлую цепочку. Поле однородное, но его направление неизвестно, поэтому неизвестных два: E_x и E_y. Одно уравнение даёт равновесие всей системы, второе — связь натяжений на концах нити через форму нити, а точнее только через положения концов. Класс задачи — «гибкая нить во внешнем поле»: натяжение меняется вдоль нити так, что $T + \lambda\varphi$ постоянно (φ — потенциал поля).

Обозначения. Ось x — вправо, ось y — вверх, $\vec{E} = (E_x, E_y)$. $T_к$ — натяжение у точки крепления, $T_г$ — у груза. Длину нити s отсчитываем от груза.

1. Равновесие всей системы «нить + груз». На систему действуют: сила со стороны крепления $\vec{T}_к$ — вдоль нити, то есть горизонтально, к точке крепления (влево); сила тяжести груза $m\vec{g}$; суммарная сила поля на нить $\lambda L\vec{E}$. Внутренние силы натяжения сокращаются, поэтому выбираем всю систему — натяжение в середине нити не понадобится. Условие равновесия

$$\vec{T}_к + m\vec{g} + \lambda L\vec{E} = 0.$$

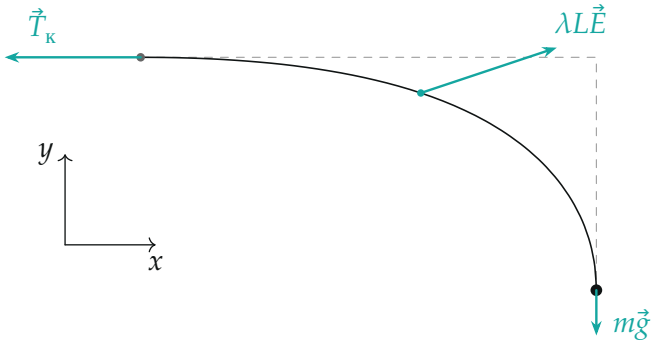
В проекциях на оси:

$$x:\ -T_к + \lambda L E_x = 0, \qquad y:\ -mg + \lambda L E_y = 0,$$

откуда

$$E_y = \frac{mg}{\lambda L}, \qquad T_к = \lambda L E_x.$$

Обе проекции поля положительны — поле направлено вправо-вверх. У груза касательная вертикальна, и равновесие груза даёт $T_г = mg$.



Внешние силы на систему «нить + груз»; длины стрелок — в масштабе для $E_x = 3E_y$ (так получается при показанной форме, её мы посчитали численно). Равнодействующая сил поля приложена к середине нити

2. Как меняется натяжение вдоль нити. Возьмём кусочек нити от s до $s+ds$. Он невесом, поэтому сумма сил на него равна нулю: натяжение со стороны крепления $\vec{T}(s+ds)$, натяжение со стороны груза $-\vec{T}(s)$ и

сила поля $\lambda\vec{E}\,ds$:

$$\vec{T}(s+ds) - \vec{T}(s) + \lambda\vec{E}\,ds = 0.$$

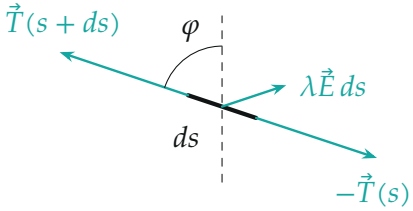
Натяжение направлено по касательной $\vec{\tau}$ к нити (к точке крепления): $\vec{T} = T\vec{\tau}$. Спроецируем уравнение на касательную. Так как $|\vec{\tau}| = 1$, изменение направления $d\vec{\tau}$ перпендикулярно $\vec{\tau}$ и в проекцию не входит:

$$dT + \lambda\,(\vec{E}\cdot\vec{\tau})\,ds = 0.$$

Но $\vec{\tau}\,ds = d\vec{r}$ — смещение вдоль нити, поэтому

$$dT = -\lambda\,\vec{E}\cdot d\vec{r} = -\lambda\,(E_x\,dx + E_y\,dy).$$

Нормальная к нити составляющая силы поля только изгибает нить и на величину натяжения не влияет.



Кусочек нити ds: натяжения по касательной, сила поля — в сторону $\vec{E}$; φ — угол касательной с вертикалью

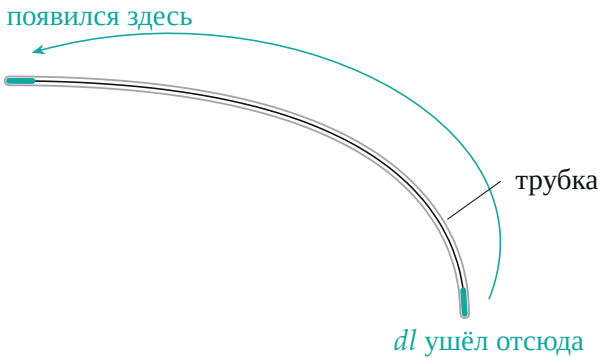
3. Суммируем от груза до точки крепления. Правая часть — полный дифференциал, потому что $\vec{E}$ постоянно; от формы нити ничего не зависит, важны только концы. Груз в точке $(S, 0)$, крепление в $(0, H)$, поэтому $\Delta x = -S$, $\Delta y = H$:

$$T_к - T_г = -\lambda(E_x\cdot(-S) + E_y H) = \lambda\,(E_x S - E_y H).$$

Это то же, что $T + \lambda\varphi = \text{const}$ с потенциалом $\varphi = -E_x x - E_y y$.

Второй способ — виртуальное перемещение. Мысленно вложим нить в гладкую трубку той же формы и протянем её вдоль трубки на dl от

груза к креплению. Форма нити не изменится, а результат такой, будто кусочек dl с зарядом $\lambda\,dl$ перенесли от груза к креплению. Работа натяжений на концах $T_к\,dl - T_г\,dl$ идёт на изменение энергии этого кусочка в поле $\lambda\,dl\,(\varphi_к - \varphi_г) = \lambda\,dl\,(E_x S - E_y H)$ — та же формула.



Протягивание нити в трубке на dl равносильно переносу кусочка dl от груза к точке крепления

4. Находим E_x**.** Подставим $T_к = \lambda L E_x$, $T_г = mg$ и $E_y = mg/(\lambda L)$:

$$\lambda L E_x - mg = \lambda S E_x - \lambda H \cdot \frac{mg}{\lambda L} \quad \Rightarrow \quad \lambda E_x (L - S) = mg\,\frac{L - H}{L},$$

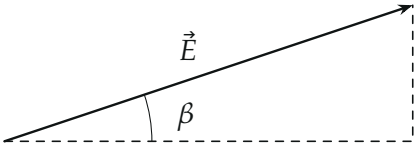
$$E_x = \frac{mg}{\lambda L} \cdot \frac{L - H}{L - S}.$$

Оба множителя положительны: нить длиннее и хорды, и каждого катета, поэтому $L > S$ и $L > H$.

Соберём ответ:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{mg}{\lambda L}\sqrt{1 + \left(\frac{L - H}{L - S}\right)^2}.$$

Поле направлено вправо-вверх под углом β к горизонту, $\operatorname{tg}\beta = E_y/E_x = (L - S)/(L - H)$.



Составляющие поля (масштаб — для показанной на рисунках формы нити, $E_x = 3E_y$)

Обратите внимание: форму нити искать не нужно. Натяжение на конце зависит только от разности потенциалов между концами, как скорость шарика на гладкой горке — только от разности высот.

Проверка. Размерность: $mg/(\lambda L)$ — сила на заряд, то есть Н/Кл. Численная проверка: мы задали $E_x = 3E_y$, проинтегрировали форму нити ($d\vec{r}/ds$ по направлению $mg\,\vec{e}_y - \lambda s\vec{E}$) и получили $S = 0{,}8036L$, $H = 0{,}4107L$; формула даёт $(L-H)/(L-S) = 0{,}5893/0{,}1964 = 3{,}000$. Симметрия: при $S = H$ формула даёт $E_x = E_y$ — поле под 45°; так и должно быть, ведь тогда $T_к = T_г = mg$, и картинка симметрична относительно биссектрисы угла между касательными на концах (численно при $E_x = E_y$ получилось $S = H = 0{,}6232L$).

Ответ. $E = \dfrac{mg}{\lambda L}\sqrt{1 + \left(\dfrac{L-H}{L-S}\right)^2}$.