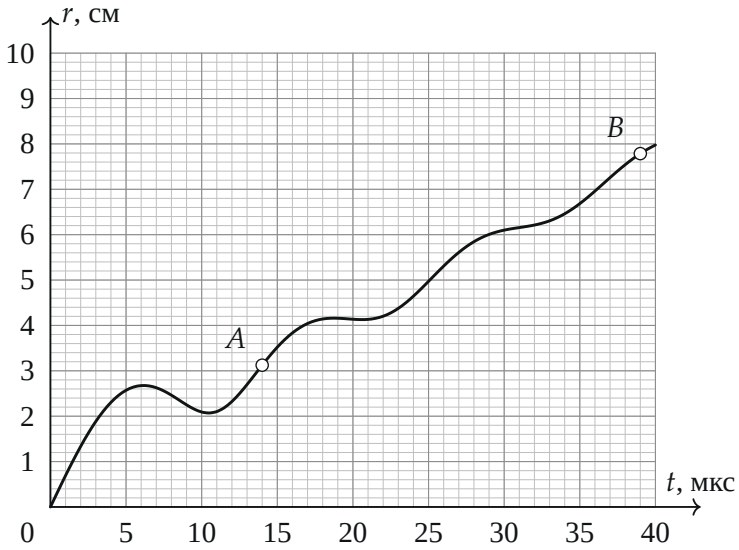
Полный улёт

Задача 4. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 11 класс, задача 4] «Полный улёт».

В однородном магнитном поле в отсутствие силы тяжести движется заряженная частица. На рисунке представлен график зависимости модуля перемещения этой частицы r относительно точки, в которой находилась эта частица в момент времени $t = 0$, от времени её дальнейшего движения t.

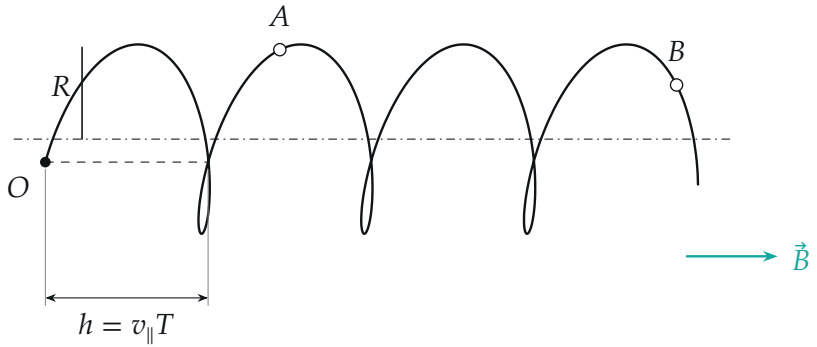


1. Определите модуль скорости v, с которой движется частица.
2. Определите угол α между вектором скорости частицы в момент $t = 0$ и вектором индукции магнитного поля.
3. Определите индукцию магнитного поля, если заряд частицы равен $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса частицы равна $m = 1{,}0 \cdot 10^{-26}$ кг.
4. Найдите расстояние между двумя положениями частицы, которые соответствуют точкам A и B на графике.

▲ **Решение. Что происходит.** Сила Лоренца перпендикулярна скорости и работы не совершает, поэтому модуль скорости постоянен. Вдоль поля сила не действует — частица равномерно смещается вдоль $\vec{B}$, а попе-

рёк поля бежит по окружности. Траектория — винтовая линия. Расстояние от старта $r(t)$ складывается из равномерно растущего смещения вдоль поля и «дыхания» хорды окружности; раз в период частица возвращается на линию поля, проходящую через старт, и r становится минимально возможным. Главная идея — две прямые из начала координат: касательная в нуле даёт полную скорость, а нижняя прямая, касающаяся графика, — продольную.

Обозначения. Ось z — вдоль $\vec{B}$, начало — в точке старта. $v_\parallel$ — проекция скорости на z, $v_\perp$ — модуль поперечной составляющей, R — радиус окружности, T — период обращения.



Винтовая линия частицы (посчитана по найденным v, $v_\parallel$, T); O — старт, A и B — положения в моменты 14 и 39 мкс

1. Закон $r(t)$. Вдоль поля сила Лоренца не действует: $z = v_\parallel t$. Поперёк поля — окружность. Второй закон Ньютона для частицы в проекции на радиус: $\dfrac{mv_\perp^2}{R} = qv_\perp B$, откуда

$$R = \frac{mv_\perp}{qB}, \qquad T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

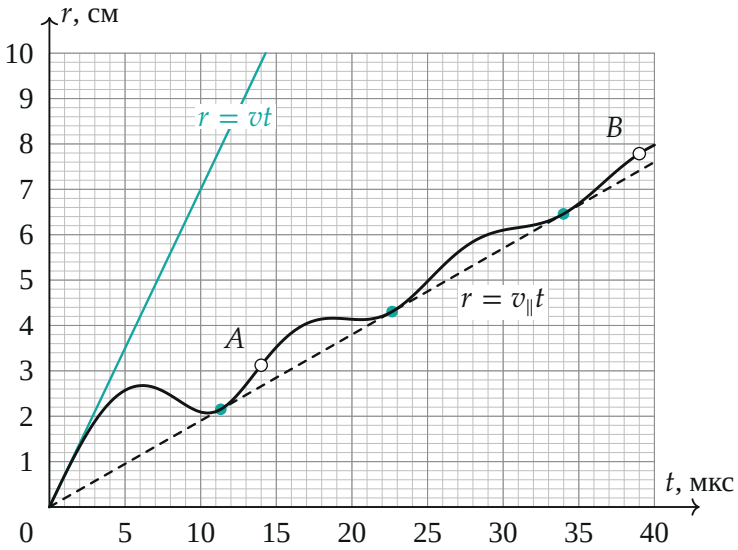
За время t частица поворачивается по окружности на угол $2\pi t/T$; хорда, стягивающая этот угол, равна $2R\sin(\pi t/T)$. Хорда перпендикулярна

оси z, поэтому по теореме Пифагора

$$r(t) = \sqrt{v_\parallel^2 t^2 + 4R^2 \sin^2 \frac{\pi t}{T}}.$$

Пункт 1. Скорость. При малых t частица ещё не успела повернуть, её путь почти прямой и $r \approx vt$ (формулой: $\sin x \approx x$, $r \approx t\sqrt{v_\parallel^2 + (2\pi R/T)^2} = t\sqrt{v_\parallel^2 + v_\perp^2} = vt$). Значит, v — наклон касательной к графику в начале координат. Проведём её (бирюзовая прямая на рисунке): она проходит через точку (14 мкс; 9,8 см):

$$v = \frac{9{,}8\text{ см}}{14\text{ мкс}} = 0{,}70\ \frac{\text{см}}{\text{мкс}} = 7{,}0\text{ км/с}.$$



Касательная в начале $r = vt$ (бирюзовая) и нижняя касательная из начала $r = v_\parallel t$ (пунктир); бирюзовые точки — касания через каждый период T

Пункт 2. Угол. Поделим r на t:

$$\frac{r}{t} = \sqrt{v_\parallel^2 + 4R^2 \frac{\sin^2(\pi t/T)}{t^2}} \geqslant |v_\parallel|,$$

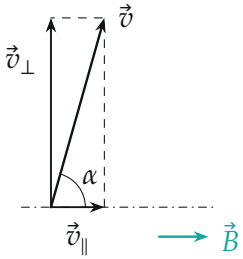
причём равенство — в моменты $t = T, 2T, 3T, \ldots$, когда синус обращается в ноль: частица снова на линии поля, проходящей через старт. Значит, прямая $r = |v_\parallel| t$ лежит не выше графика и касается его в этих точках — это самая пологая прямая из начала, имеющая с графиком общие точки. Проведём её (пунктир): при $t = 40$ мкс она даёт 7,6 см,

$$|v_\parallel| = \frac{7{,}6 \text{ см}}{40 \text{ мкс}} = 0{,}19 \frac{\text{см}}{\text{мкс}} = 1{,}9 \text{ км/с}.$$

Угол между скоростью и полем:

$$\cos\alpha = \frac{v_\parallel}{v} = \pm\frac{1{,}9}{7{,}0} = \pm 0{,}271 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 74^\circ \text{ или } \alpha \approx 106^\circ.$$

Обратите внимание: график $r(t)$ не различает, летит частица по полю или против, — оба угла годятся.



Разложение начальной скорости (длины — по модулю: $v_\parallel = 1{,}9$, $v_\perp = 6{,}7$ км/с)

Пункт 3. Индукция поля. Точки касания нижней прямой отстоят друг от друга на период T. Чтобы ошибка отсчёта делилась на число периодов, берём третье касание, $t = 34$ мкс:

$$T = \frac{34 \text{ мкс}}{3} \approx 11{,}3 \text{ мкс},$$

$$B = \frac{2\pi m}{qT} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-26} \text{ кг}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 11{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ с}} \approx 35 \text{ мТл}.$$

Пункт 4. Расстояние AB**.** Между положениями A (14 мкс) и B (39 мкс) прошло $t_{AB} = 25$ мкс. Вдоль поля частица сместилась на

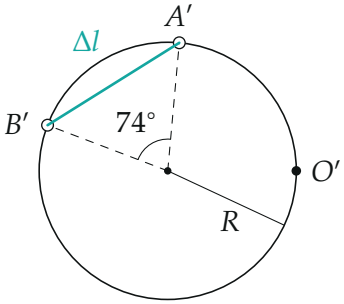
$$\Delta z = |v_\parallel|\, t_{AB} = 0{,}19 \cdot 25 \text{ см} = 4{,}75 \text{ см}.$$

Поперёк поля она идёт по окружности радиуса

$$R = \frac{v_\perp T}{2\pi} = \frac{T\sqrt{v^2 - v_\parallel^2}}{2\pi} = \frac{11{,}33 \cdot \sqrt{0{,}70^2 - 0{,}19^2}}{2\pi} \text{ см} \approx 1{,}21 \text{ см}$$

и поворачивается на угол $2\pi t_{AB}/T$, то есть на 2,2 оборота: лишние 74° сверх двух полных. Хорда между проекциями A и B:

$$\Delta l = 2R\left|\sin\frac{\pi t_{AB}}{T}\right| \approx 2 \cdot 1{,}21 \cdot 0{,}62 \text{ см} \approx 1{,}5 \text{ см}.$$



Проекция на плоскость, перпендикулярную $\vec{B}$*:* O'*,* A'*,* B' *— проекции старта и положений* A*,* B

Смещения вдоль поля и поперёк перпендикулярны, поэтому

$$L_{AB} = \sqrt{\Delta z^2 + \Delta l^2} = \sqrt{4{,}75^2 + 1{,}5^2} \text{ см} \approx 5{,}0 \text{ см}.$$

Проверка. Подставим найденные $v = 0{,}70$ см/мкс, $v_\parallel = 0{,}19$ см/мкс, $T = 11{,}33$ мкс в формулу $r(t)$: $r(14 \text{ мкс}) = 3{,}12$ см и $r(39 \text{ мкс}) = 7{,}79$ см — точки A и B графика; максимум 2,67 см при 6,2 мкс — первый горб графика. Размерность B: кг/(Кл · с) = Тл. Смысл: по одному графику

расстояний восстанавливается вся винтовая линия — шаг 2,15 см, радиус 1,21 см и угол наклона.

Ответ. 1) $v \approx 7{,}0$ км/с; 2) $\alpha \approx 74°$ или $\alpha \approx 106°$ ($\cos\alpha = \pm 0{,}27$); 3) $B = \dfrac{2\pi m}{qT} \approx 35$ мТл; 4) $L_{AB} \approx 5{,}0$ см.