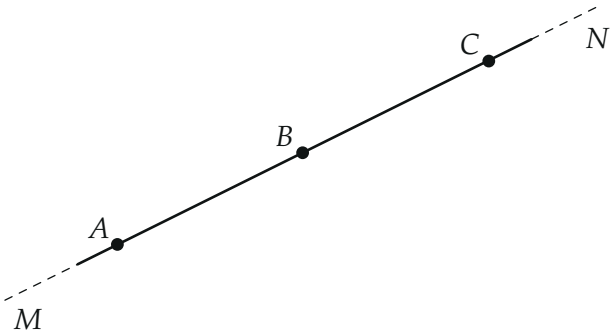
Троеточие

Задача 5. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 11 класс, задача 5] «Троеточие».

При очередном разборе архива Снеллиуса на глаза одному из специалистов попался небольшой рисунок с тремя точками A, B и C, лежащими на одной прямой MN. Из комментариев к рисунку следовало, что прямая MN проходила через оптический центр тонкой линзы под небольшим углом к главной оптической оси, а точки A, B и C обладали любопытным свойством: при помещении точечного источника света в любую из них изображение оказывалось в одной из двух других точек. Также было указано, что расстояния между точками A и B и между точками B и C, в которые помещали источник, были одинаковы и равнялись l, а модуль фокусного расстояния линзы был равен F.



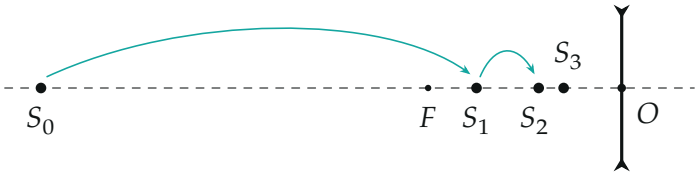
1. Определите, о рассеивающей или собирающей линзе шла речь.
2. С какой стороны (слева или справа) от точки B располагался оптический центр линзы?
3. На каком расстоянии от точки B располагался оптический центр линзы?
4. Под каким углом к прямой MN наклонена главная оптическая ось линзы?

▲ **Решение. Что происходит.** Луч через оптический центр не преломляется, поэтому изображение точки прямой MN лежит на той же прямой MN. Тонкая линза работает с расстояниями вдоль главной оси: точка

на MN на расстоянии s от центра O находится на расстоянии $s\cos\alpha$ от плоскости линзы. Главная идея — перебрать, какие точки могут быть изображениями каких, пользуясь двумя фактами: мнимое изображение лежит по ту же сторону от линзы, что и источник, а действительное — по другую; и обратимостью хода лучей (источник в действительном изображении даёт изображение в прежнем источнике).

Обозначения. O — оптический центр, α — угол между MN и главной оптической осью, $d = OB$. Формула тонкой линзы для расстояний вдоль оси: $\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \pm\frac{1}{F}$, где a — расстояние от источника до плоскости линзы, b — от изображения.

Пункт 1. Линза собирающая. Пусть линза рассеивающая. Её изображение всегда мнимое и лежит между источником и линзой — ближе к линзе. Поместим источник в первую точку; изображение во второй, ближе к O. Источник во второй даёт изображение ещё ближе к O — это не может быть первая точка, значит, это третья. Источник в третьей даёт изображение ещё ближе, а других точек нет. Цепочка не замыкается — противоречие.

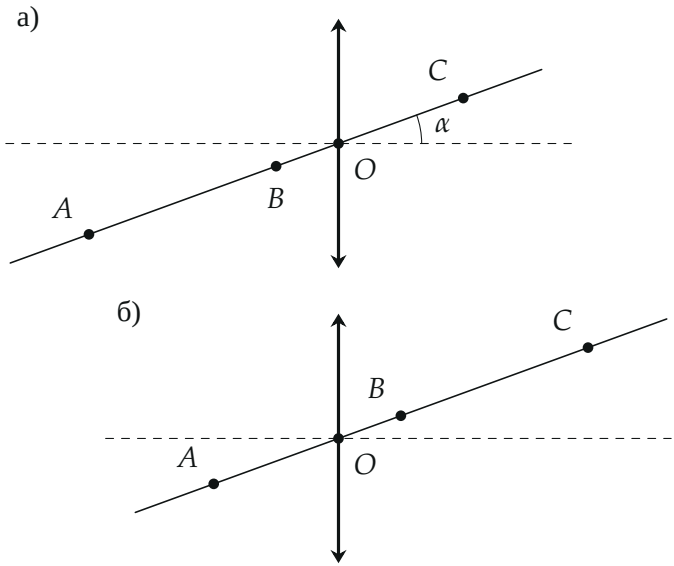


Рассеивающая линза: каждое следующее изображение ближе к линзе, цепочка $S_0 \to S_1 \to S_2 \to \ldots$ не возвращается назад (посчитано для $S_0 = 3F$)

Пункт 2. Какие точки — чьи изображения. У собирающей линзы мнимое изображение лежит по ту же сторону и *дальше* от линзы, чем источник, поэтому две точки не могут быть мнимыми изображениями друг друга. Значит, есть пара точек — действительные изображения друг друга (по обратимости лучей). Они по разные стороны от линзы. Третья точка, будучи источником, даёт мнимое изображение — в одну из точек пары, лежащую с ней по одну сторону и дальше от линзы.

Пара не может быть соседней. Если это A и B, то O между ними, а C — по одну сторону с B и дальше от O, и её мнимому изображению

негде оказаться: оно должно быть ещё дальше, чем C. Так же отпадает пара B, C. Остаётся: A и C — действительные изображения друг друга, O между ними, B — ближе фокуса и даёт мнимое изображение либо в A (тогда O между B и C, справа от B), либо в C (тогда O между A и B, слева от B). Оба случая симметричны — центр линзы может быть и справа, и слева от B.



Два возможных положения линзы (масштаб — для $F = 2$, $\alpha = 20°$): а) B даёт мнимое изображение в A; б) — в C

Пункт 3. Расстояние OB**.** Возьмём случай а). Вдоль MN: $OB = d$, $OA = l + d$, $OC = l - d$. Вдоль оси эти расстояния умножаются на $\cos\alpha$.

Формула тонкой линзы для источника в B (изображение мнимое, в A):

$$\frac{1}{d\cos\alpha} - \frac{1}{(l+d)\cos\alpha} = \frac{1}{F}.$$

Формула тонкой линзы для источника в A (изображение действительное, в C):

$$\frac{1}{(l+d)\cos\alpha} + \frac{1}{(l-d)\cos\alpha} = \frac{1}{F}.$$

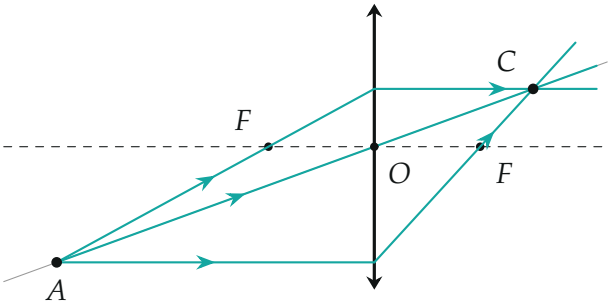
Правые части равны — приравняем левые, и $\cos\alpha$ с F уйдут:

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{l+d}=\frac{1}{l+d}+\frac{1}{l-d} \quad\Rightarrow\quad \frac{l-2d}{d(l-d)}=\frac{2}{l+d'}$$

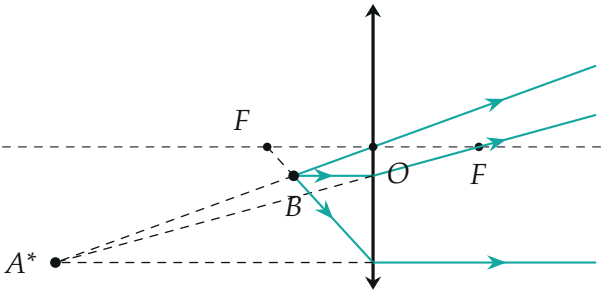
$$(l-2d)(l+d)=2d(l-d).$$

Раскроем скобки: $l^2-ld-2d^2=2ld-2d^2$, откуда $l^2=3ld$ и

$$d=\frac{l}{3}.$$



Источник в A: три луча (параллельный оси, через центр, через фокус) сходятся в C — действительное изображение. Лучи посчитаны для $F=2$, $l=4{,}79$, $\alpha=20°$



Источник в B (ближе фокуса): лучи расходятся, их продолжения (пунктир) сходятся в A — мнимое изображение

Пункт 4. Угол. Подставим $d = l/3$ в первое уравнение:

$$\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{3}{l}-\frac{3}{4l}\right)=\frac{9}{4l\cos\alpha}=\frac{1}{F},$$

$$\cos\alpha=\frac{9F}{4l},\qquad \alpha=\arccos\frac{9F}{4l}.$$

Угол по условию малый, поэтому $\cos\alpha\approx 1-\alpha^2/2$ и

$$\alpha\approx\sqrt{2\left(1-\frac{9F}{4l}\right)}=\sqrt{\frac{4l-9F}{2l}}.$$

Решение существует только при $l\geqslant\frac{9}{4}F$, а малость угла означает, что l лишь чуть больше $\frac{9}{4}F$. В случае б) всё зеркально, ответы те же.

Обратите внимание: формулу линзы нельзя писать с расстояниями вдоль MN — она связывает расстояния до плоскости линзы, то есть вдоль главной оси; иначе $\cos\alpha$ потеряется, и угол найти будет не из чего.

Проверка. Третье соотношение — источник в C, изображение в A:

$$\frac{1}{(l-d)\cos\alpha}+\frac{1}{(l+d)\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{3}{2l}+\frac{3}{4l}\right)=\frac{9}{4l\cos\alpha}=\frac{1}{F}$$

— выполняется само (обратимость лучей). Численно для $F=2$, $\alpha=20°$, $l=4{,}79$: A на оси в 6,0 от линзы даёт изображение в $6\cdot 2/(6-2)=3{,}0$ (точка C), B в 1,5 — мнимое в $1{,}5\cdot 2/(1{,}5-2)=-6{,}0$ (точка A); увеличения $-0{,}5$ и 4 переводят и высоты в высоты точек C и A.

Ответ. 1) собирающая; 2) возможны оба варианта: центр справа от B (тогда B даёт мнимое изображение в A) или слева (мнимое изображение в C); 3) $OB=l/3$; 4) $\alpha=\arccos\dfrac{9F}{4l}\approx\sqrt{\dfrac{4l-9F}{2l}}$.