Не зная броду, не суйся в воду

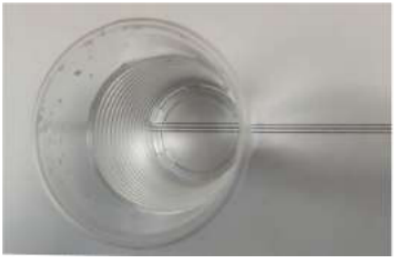
Задача 1. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 9 класс, задача 1] «Не зная броду, не суйся в воду».

Внимание! Оценка погрешностей в этой работе не требуется.

Физический смысл пословицы, стоящей в названии работы, состоит в том, что слой воды, как и любая плоскопараллельная пластина, приближает объект наблюдения к наблюдателю. Величина оптического смещения объекта к наблюдателю h зависит от толщины плоскопараллельной пластины H и её оптических характеристик. Для малых углов отклонения лучей от вертикали к поверхности воды зависимость имеет такой вид:

$$h = kH^{\alpha},$$

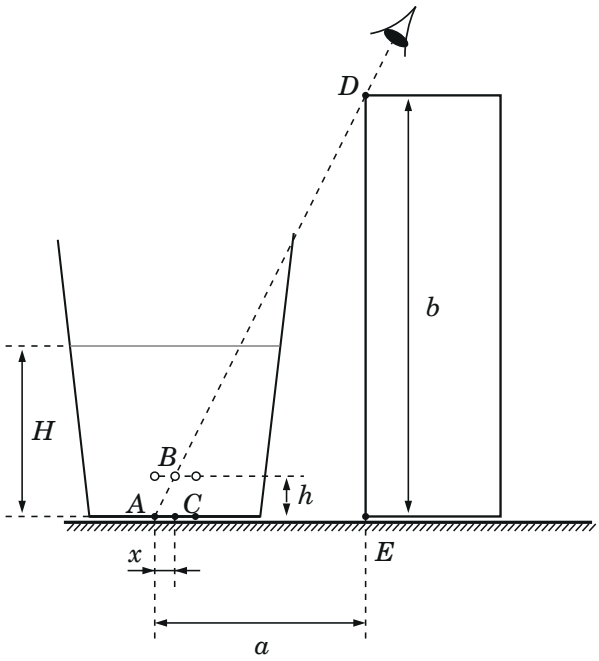
где k — коэффициент, зависящий от оптических характеристик плоскопараллельной пластины. Для исследования этой зависимости вы должны на чистом белом листе бумаги нарисовать три параллельные линии на расстоянии $x = 2$ мм друг от друга. Затем налить в пластиковый стакан слой воды не менее 40 мм и наблюдать сверху эти три линии. При положении вашего глаза на одной вертикали к поверхности воды с центральной линией вы увидите линии под водой на продолжении линий, наблюдаемых без воды (см. фото слева).





При небольшом отклонении вы увидите смещение линий под водой. Вам необходимо найти такое положение, при котором линии смещаются на величину $x = 2$ мм. При этом две линии под водой являются продолжением двух линий, наблюдаемых без воды (см. фото справа). Для

определения величины смещения h воспользуйтесь подобием треугольников ABC и ADE (см. рисунок). Определить положение точек E и D вам поможет уголок из картона, вершина D которого должна попасть на прямую AB.



1. Проведите измерение величин a и b для разных уровней воды H в стакане.
2. Используя рисунок, получите расчётную формулу для зависимости h через a, b и x.
3. Постройте график зависимости h от H и определите степень α и коэффициент k для воды.
4. Постройте ход луча из точки A и, используя закон преломления света, теоретически получите формулу для нахождения величины смещения h для слоя воды H. Рассмотрите преломление для малых углов падения. Определите показатель преломления n воды, используя свой результат для коэффициента k.

Примечание: для малых углов можно считать, что $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi \approx \varphi$; абсолютный показатель преломления воздуха считайте равным 1. Оборудование: сосуд с водой; прозрачный пластиковый стаканчик; линейка; картонный уголок длиной около 30 см; чистый лист бумаги А4; миллиметровая бумага для построения графиков.

▲ **Решение. Что происходит.** Глаз видит линию на дне стакана по лучам, которые вышли из воды; продолжения этих лучей назад сходятся выше дна — в изображении линии. Смещение изображения вверх h мы измеряем геометрически: глаз смотрит так, что изображение линии A (поднятое в точку B) совпало с линией C, лежащей рядом на бумаге вне воды. Прямая взгляда DB продолжается до дна в точку A, и подобие треугольников даёт h. Теория — закон преломления для малых углов. Класс задачи — экспериментальная геометрическая оптика: измерение, линеаризация, график.

Обозначения. H — толщина слоя воды; h — подъём изображения дна; $x = 2$ мм — расстояние между линиями; $a = AE$ — расстояние по горизонтали от линии A до уголка; $b = DE$ — высота точки D уголка над столом; φ, φ' — углы луча с вертикалью в воде и в воздухе; n — показатель преломления воды.

Пункт 2. Расчётная формула. На рисунке условия изображение B линии находится над точкой C на высоте h, а $AC = x$ (смещение, которое мы добились, равно расстоянию между линиями). Луч взгляда проходит через D и B, его продолжение — через A. Треугольники ABC и ADE прямоугольные (углы C и E прямые) с общим острым углом при вершине A — они подобны:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{x} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{bx}{a}.$$

Пункт 1. Измерения. В опыте организаторов (таблица) высота точки D не менялась, $b = 242$ мм, а уголок двигали, добиваясь совмещения

линий; h посчитано по формуле пункта 2:

H, мм	45	49	54	58	63	67
a, мм	37	34	31	30	28	26
h, мм	13,1	14,2	15,6	16,1	17,3	18,6

H, мм	71	75	78	81	85
a, мм	25	24	23	22	21
h, мм	19,4	20,2	21,0	22,0	23,0

($b = 242$ мм, $x = 2$ мм во всех опытах).

Пункт 3. График и показатель степени. Точки $h(H)$ ложатся на прямую, проходящую через начало координат (рис. 1): h пропорционально H, то есть $\alpha = 1$. Проверим и в логарифмах: наклон прямой $\ln h(\ln H)$ по методу наименьших квадратов равен 0,87; отклонение от 1 даёт округление a до миллиметра (при $a = 21$–37 мм это 3–5 % в каждой точке), а теория (пункт 4) даёт ровно $\alpha = 1$. Угловой коэффициент прямой через начало координат по методу наименьших квадратов

$$k = \frac{\sum H_i h_i}{\sum H_i^2} = 0{,}275 \approx 0{,}28.$$

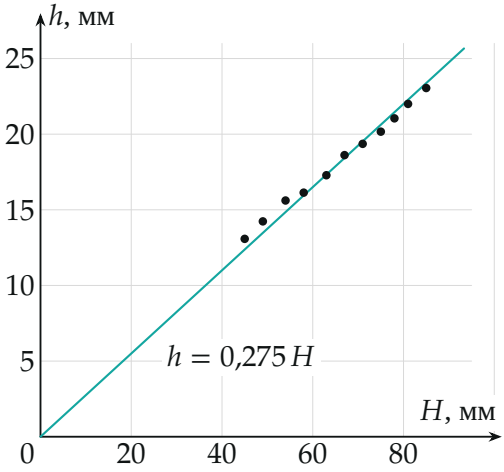


Рис. 1. Зависимость $h(H)$ по данным таблицы; прямая через начало координат — метод наименьших квадратов, $k = 0{,}275$.

Пункт 4. Теория. Рассмотрим два луча из точки A на дне (рис. 2). Луч AK идёт вертикально и выходит без преломления. Луч AM падает на поверхность под углом φ к вертикали и выходит под углом φ' (луч MN). Глаз продолжает вышедшие лучи назад: они пересекаются в точке A' на вертикали AK — изображении точки A. Подъём $h = AA'$.

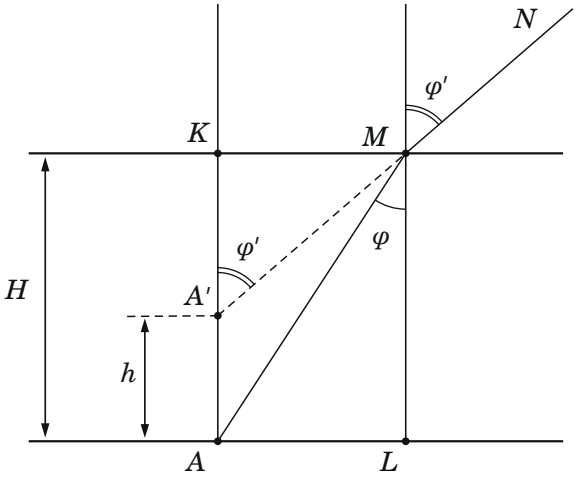


Рис. 2. Ход лучей из точки A на дне: AK — без преломления, AM преломляется в M и идёт по MN; продолжение MN назад пересекает AK в изображении A′.

Закон преломления в точке M (показатель воздуха 1):

$$n \sin \varphi = \sin \varphi'.$$

Отрезок KM выразим из двух прямоугольных треугольников — AKM (катет $AK = H$) и $A'KM$ (катет $A'K = H - h$):

$$KM = H \operatorname{tg} \varphi = (H - h) \operatorname{tg} \varphi'.$$

Для малых углов $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi \approx \varphi$, тогда $\varphi' = n\varphi$ и

$$H\varphi = (H-h)\,n\varphi \quad \Rightarrow \quad h = \frac{n-1}{n}H.$$

Теория подтверждает $\alpha = 1$ и даёт $k = \dfrac{n-1}{n}$, откуда

$$n = \frac{1}{1-k} = \frac{1}{1-0{,}28} \approx 1{,}39.$$

Обратите внимание. Формула $h = \frac{n-1}{n}H$ верна только для лучей, близких к вертикали: при больших углах изображение поднимается сильнее, и точки ушли бы с прямой. Поэтому глаз держат почти над линиями, а уголок — высоко ($b \gg a$).

Проверка. Размерность: $h = bx/a$ — миллиметры. Пределы: при $n = 1$ (воды нет) $h = 0$; при $n \to \infty$ $h \to H$ — дно «поднимается» до поверхности. Табличное значение показателя воды 1,33; наш результат 1,39 отличается на 4 %: k чувствителен к ошибке в a — при $a \approx 20$ мм ошибка в 1 мм меняет h на 5 %.

Ответ. 1) таблица измерений — в решении; 2) $h = \dfrac{bx}{a}$; 3) $\alpha = 1$ (линейная зависимость), $k \approx 0{,}28$; 4) $h = \dfrac{n-1}{n}H$, $n = \dfrac{1}{1-k} \approx 1{,}39$.