Плотность изоленты

Задача 2. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 9 класс, задача 2] «Плотность изоленты».

Внимание! В этом эксперименте необходима оценка погрешностей.

Поверхностная плотность (масса единицы площади) выданной вам бумаги с миллиметровой сеткой $\sigma = 80$ г/м^2. Считайте, что цена деления сетки в точности равна 1 мм. Длина изоленты в рулоне $L = 20$ м. Определите:

1. толщину h изоленты;
2. линейную плотность изоленты λ (массу единицы длины);
3. объёмную плотность изоленты ρ (массу единицы объёма).

Оборудование: лист бумаги А4 с напечатанной миллиметровой сеткой, рулон изоляционной ленты, ножницы, нить длиной порядка 50 см, миллиметровая бумага А4 для построения графиков.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Весов нет, линейки нет — есть только миллиметровка известной поверхностной плотности. Из неё делаем и линейку (сетка), и эталон массы (масса листа $=$ σ·площадь), и рычаг. Толщину ленты находим, приравняв объём рулона, записанный двумя способами. Массу ленты — по правилу моментов: наматываем на конец бумажного рычага куски ленты и смотрим, насколько сдвигается точка равновесия. Чтобы погрешность была меньше, берём несколько кусков и строим линейный график. Класс задачи — экспериментальная статика: правило моментов, линеаризация, МНК.

Обозначения. $a \times b$ — размеры листа миллиметровки без полей, M — его масса; l — ширина ленты; D, d — внешний и внутренний диаметры намотки рулона; m_0 — масса куска ленты длиной b; n — число намотанных кусков; x — смещение точки подвеса от середины трубочки.

Пункт 1. Толщина ленты. Измерения по сетке: ширина ленты $l = (19 \pm 1)$ мм, внешний диаметр рулона $D = (72 \pm 1)$ мм, внутренний (без картонной втулки) $d = (44 \pm 1)$ мм (рис. 1). Объём ленты в рулоне — это объём кольца ширины l, и тот же объём у ленты, растянутой в

полосу $L \times l \times h$:

$$Lhl = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} l \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4L},$$

$$h = \frac{3{,}14 \cdot (72^2 - 44^2) \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 20} \text{ м} = 127 \text{ мкм}.$$

Погрешность: $\delta(D^2 - d^2) = 2D\,\delta D + 2d\,\delta d = 2(72 + 44) \cdot 1 = 232$ мм^2 при $D^2 - d^2 = 3248$ мм^2 — это 7 %, $\Delta h = 9$ мкм:

$$h = (127 \pm 9) \text{ мкм}$$

(заводская толщина изоленты 0,13 мм).

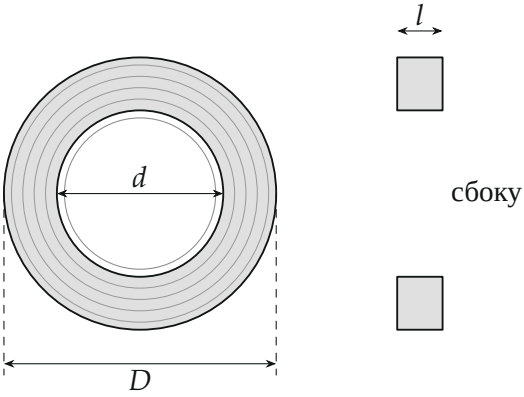

Рис. 1. Рулон изоленты: намотка — кольцо с диаметрами D и d шириной l (картонная втулка — серый круг внутри — не считается).

2. Эталон массы и рычаг. Обрезаем у листа белые поля, остаётся сетка $a = (20{,}0 \pm 0{,}1)$ см, $b = (28{,}0 \pm 0{,}1)$ см. Её масса

$$M = ab\sigma = 0{,}200 \cdot 0{,}280 \cdot 80 \text{ г} = (4{,}48 \pm 0{,}04) \text{ г}.$$

Сворачиваем лист плотной трубочкой длины b (сеткой наружу — она служит линейкой), края закрепляем узкими полосками ленты. Трубочка однородна, её центр масс — посередине: находим его, подвесив трубочку на нити горизонтально.

Отрезаем от рулона куски длиной $b = 28$ см (по длине трубочки, масса каждого m_0) и наматываем их по одному заподлицо на один край трубочки. Намотка занимает полосу шириной l у края, её центр масс — на $\frac{l}{2}$ от края, то есть на $\frac{b}{2} - \frac{l}{2}$ от середины. Для каждого n заново уравновешиваем трубочку и по сетке читаем смещение x точки подвеса от середины (рис. 2).

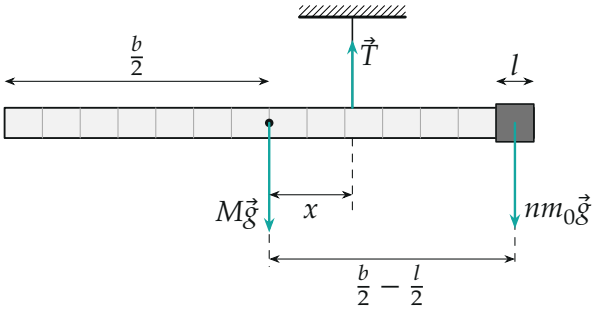

Рис. 2. Бумажная трубочка длины b на нити; справа — n намотанных кусков ленты ширины l. Силы и плечи относительно точки подвеса.

3. Правило моментов. Трубочка в равновесии; правило моментов относительно точки подвеса (момент силы $\vec{T}$ нулевой):

$$Mg\,x = nm_0g\Big(\frac{b}{2} - \frac{l}{2} - x\Big).$$

Делим на $nMgx$ и выражаем $\frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n} = \frac{m_0}{M}\,\frac{b-l}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{m_0}{M}. \qquad (1)$$

Зависимость $\frac{1}{n}$ от $\frac{1}{x}$ линейная: угловой коэффициент $k = \frac{m_0}{M}\,\frac{b-l}{2}$, свободный член $-\frac{m_0}{M}$. Поэтому строим именно её, а не $x(n)$.

4. Измерения и график. Данные опыта организаторов (x — с точно-

стью ± 1 мм):

n	1	2	3	4	5
x, мм	20	36	47	56	63
$1/n$	1,00	0,50	0,33	0,25	0,20
$1/x$, м$^{-1}$	$50{,}0 \pm 2{,}5$	$27{,}8 \pm 0{,}8$	$21{,}3 \pm 0{,}5$	$17{,}9 \pm 0{,}3$	$15{,}9 \pm 0{,}3$

Погрешность $\frac{1}{x}$ равна $\frac{\Delta x}{x^2}$ — у первой точки она в 5–8 раз больше, чем у остальных, поэтому прямую проводим методом наименьших квадратов с весами $1/(\Delta\frac{1}{x})^2$ (рис. 3):

$$k = (24{,}4 \pm 1{,}2)\text{ мм}, \qquad \text{свободный член } -0{,}19.$$

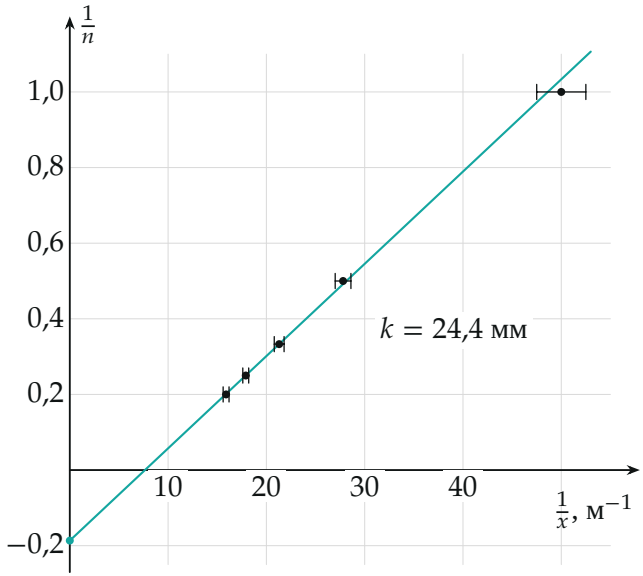

Рис. 3. График $\frac{1}{n}(\frac{1}{x})$ с погрешностями $\frac{1}{x}$; прямая — МНК с весами. Отрезок на оси $\frac{1}{n}$ равен $-\frac{m_0}{M}$.

5. Масса куска и линейная плотность. Из углового коэффициента (1):

$$m_0 = \frac{2kM}{b-l} = \frac{2 \cdot 24{,}4 \cdot 4{,}48}{280-19}\text{ г} = (0{,}84 \pm 0{,}06)\text{ г}.$$

Второй способ — по свободному члену: $m_0 = 0{,}19 \cdot M = 0{,}84$ г — сходится, значит, модель рычага (центр намотки на $\frac{l}{2}$ от края) верна. Погрешность m_0: $\varepsilon_k = 5\,\%$, $\varepsilon_M = 1\,\%$, $\varepsilon_{b-l} \approx 1\,\%$ — всего около 7 %.

Проверим модель на исходных данных: из правила моментов $x(n) = \dfrac{nm_0}{M + nm_0} \cdot \dfrac{b-l}{2}$ — кривая с насыщением к $\frac{b-l}{2} = 130$ мм. С найденным $m_0 = 0{,}84$ г она проходит через все пять измеренных точек в пределах ± 1 мм (рис. 4).

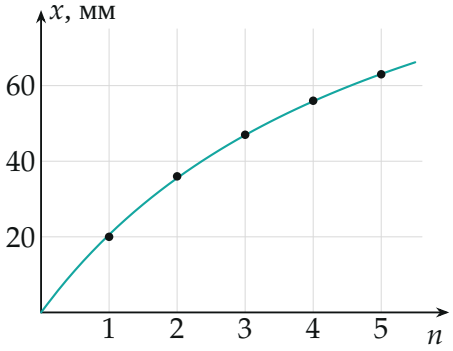

Рис. 4. Смещение точки подвеса x от числа кусков n: точки — опыт, кривая — правило моментов с $m_0 = 0{,}84$ г.

Линейная плотность — масса единицы длины:

$$\lambda = \frac{m_0}{b} = \frac{0{,}84\text{ г}}{0{,}28\text{ м}} = (3{,}0 \pm 0{,}2)\text{ г/м}.$$

Пункт 3. Объёмная плотность. Масса единицы длины ленты делённая на площадь её сечения hl:

$$\rho = \frac{\lambda}{hl} = \frac{3{,}0 \cdot 10^{-3}}{127 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}019}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \approx 1{,}24 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Относительная погрешность складывается из погрешностей λ (7 %), h (7 %) и l (5 %) — около 19 %: $\rho = (1{,}24 \pm 0{,}24)$ г/см^3.

Обратите внимание. Куски берём длиной ровно b — тогда их масса связана с λ без лишних измерений. И наматываем их заподлицо с краем:

если намотка «уползёт» к середине, плечо $\frac{b}{2} - \frac{l}{2}$ станет неверным, и два способа в шаге 5 разойдутся.

Проверка. Размерности: $k = \frac{m_0}{M} \cdot \frac{b-l}{2}$ — длина (мм), $\rho = \frac{\lambda}{hl}$ — кг/м^3. Порядок величины: ПВХ-изолента имеет плотность 1,2–1,4 г/см^3 — немного тяжелее воды, наш результат в этом интервале.

Ответ. 1) $h = \dfrac{\pi(D^2 - d^2)}{4L} = (127 \pm 9)$ мкм; 2) $\lambda = (3{,}0 \pm 0{,}2)$ г/м; 3) $\rho = \dfrac{\lambda}{hl} = (1{,}24 \pm 0{,}24)$ г/см^3.