Лифт

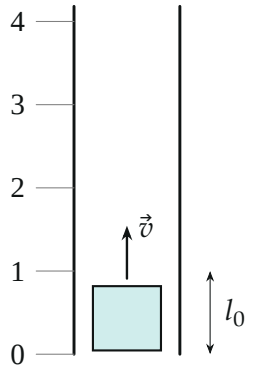
Задача 1. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 9 класс, задача 1] «Лифт».

Лифт начинает движение из состояния покоя и останавливается на два этажа выше через время $t_2 = 5{,}0$ с, а на четыре этажа выше — через $t_4 = 8{,}0$ с. Лифт, не останавливаясь между этажами, преодолевает необходимую дистанцию за минимально возможное время, при этом модули его скорости и ускорения не превышают некоторых неизвестных значений v_0 и a_0, соответственно. Высота всех этажей одинакова, временем открытия и закрытия дверей можете пренебречь. Используя без доказательства тот факт, что при подъёме на два этажа вверх лифт достигает предельного значения скорости v_0, найдите:

1. за какое время t_3 лифт поднимется на три этажа?
2. за какое время t_1 лифт поднимется на один этаж?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на оптимальное движение с ограничениями: быстрее всего доехать — значит разгоняться с наибольшим ускорением a_0, ехать с наибольшей скоростью v_0 и тормозить с a_0 в самый последний момент. Удобнее всего работать с графиком $v(t)$: путь — площадь под ним. Главная идея: пока лифт успевает набрать v_0, время подъёма растёт с числом этажей *линейно*; на короткой дистанции он не успевает — график становится треугольником, и формула другая.

Обозначения. l_0 — высота этажа; n — число этажей подъёма; $t(n)$ — минимальное время подъёма; $\tau = v_0/a_0$ — время разгона до v_0 (и торможения от неё).



Поясняющий рисунок. Шахта лифта; этажи пронумерованы от начального, высота этажа l_0.

1. Длинная дистанция: график — трапеция. Пусть лифт успевает разогнаться до v_0. Тогда оптимальный режим: разгон с a_0 за время τ, движение со скоростью v_0, торможение с a_0 за время τ (рис. 1). Любой другой график с теми же ограничениями лежит под этим и даёт меньший путь за то же время. Путь — площадь трапеции с основаниями t и $t-2\tau$ и высотой v_0:

$$nl_0 = \frac{t + (t-2\tau)}{2}\, v_0 = (t-\tau)v_0 \quad \Longrightarrow \quad t(n) = \frac{nl_0}{v_0} + \tau.$$

Применимость: участок с постоянной скоростью есть, $t - 2\tau \geqslant 0$, то есть $nl_0 \geqslant v_0\tau = \dfrac{v_0^2}{a_0}$.

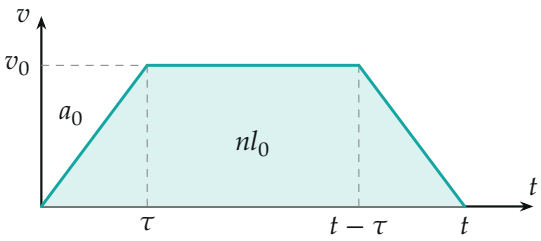


Рис. 1. Оптимальный график скорости, когда лифт успевает набрать v_0: разгон, равномерное движение, торможение. Площадь — пройденный путь nl_0.

2. Пункт 1 — три этажа. По условию на двух этажах (и тем более на трёх и четырёх) лифт достигает v_0, поэтому для $n = 2, 3, 4$ годится формула шага 1:

$$t_2 = \frac{2l_0}{v_0} + \tau, \qquad t_3 = \frac{3l_0}{v_0} + \tau, \qquad t_4 = \frac{4l_0}{v_0} + \tau.$$

$t(n)$ — линейная функция n, поэтому t_3 — среднее арифметическое t_2 и t_4:

$$t_3 = \frac{t_2 + t_4}{2} = \frac{5{,}0 + 8{,}0}{2}\ \text{с} = 6{,}5\ \text{с}.$$

3. Параметры лифта. Из двух уравнений для t_2 и t_4 найдём время проезда одного этажа на полной скорости и время разгона:

$$\frac{l_0}{v_0} = \frac{t_4 - t_2}{2} = 1{,}5\text{ с}, \qquad \tau = t_2 - \frac{2l_0}{v_0} = 2t_2 - t_4 = 2{,}0\text{ с}.$$

4. Короткая дистанция: успевает ли лифт на одном этаже. Условие шага 1 для n этажей: $n \geqslant \dfrac{v_0^2}{a_0 l_0} = \dfrac{\tau}{l_0/v_0}$. Подставим:

$$n_{\text{кр}} = \frac{\tau}{l_0/v_0} = \frac{2(2t_2 - t_4)}{t_4 - t_2} = \frac{2{,}0}{1{,}5} = \frac{4}{3} > 1.$$

На один этаж лифт *не* успевает набрать v_0: по формуле шага 1 вышло бы $t = 1{,}5 + 2{,}0 = 3{,}5$ с с отрицательным участком равномерного движения $t - 2\tau = -0{,}5$ с — так не бывает.

5. Пункт 2 — график-треугольник. Если до v_0 не дотянуть, быстрее всего — половину времени разгоняться с a_0, половину — тормозить с a_0 (рис. 2). Наибольшая скорость $a_0 t/2$, путь — площадь треугольника:

$$l_0 = \frac{1}{2}\, t_1 \cdot \frac{a_0 t_1}{2} = \frac{a_0 t_1^2}{4} \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 2\sqrt{\frac{l_0}{a_0}}.$$

Ускорение выразим через найденное: $\dfrac{l_0}{a_0} = \dfrac{l_0}{v_0} \cdot \dfrac{v_0}{a_0} = \dfrac{l_0}{v_0}\,\tau$, поэтому

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{t_4 - t_2}{2}\,(2t_2 - t_4)} = \sqrt{2(t_4 - t_2)(2t_2 - t_4)},$$

$$t_1 = \sqrt{2 \cdot 3{,}0 \cdot 2{,}0}\text{ с} = 2\sqrt{3}\text{ с} \approx 3{,}5\text{ с}.$$

Наибольшая скорость на одном этаже $a_0 t_1/2 = v_0 \cdot \dfrac{t_1}{2\tau} = 0{,}87\, v_0 < v_0$ — режим выбран верно.

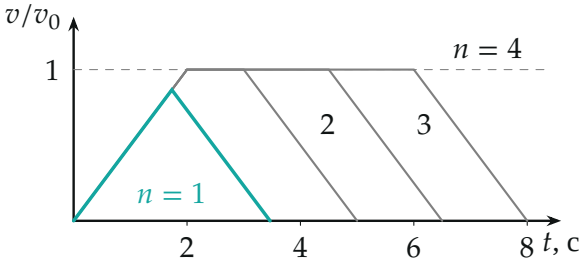


Рис. 2. Графики $v(t)$ для подъёма на 1, 2, 3 и 4 этажа (по найденным $\tau = 2$ с и $l_0/v_0 = 1{,}5$ с). На один этаж — треугольник, скорость v_0 не достигается; остальные — трапеции, концы через 5; 6,5; 8 с.

6. Время подъёма как функция числа этажей. Соберём обе формулы (рис. 3): $t = 2\sqrt{n\,l_0/a_0}$ при $n \leqslant \frac{4}{3}$ и $t = n\,l_0/v_0 + \tau$ при $n \geqslant \frac{4}{3}$. В точке $n = \frac{4}{3}$ обе дают 4 с — график непрерывный, а прямая — касательная к корню. Точки задачи: 3,5; 5; 6,5; 8 с.

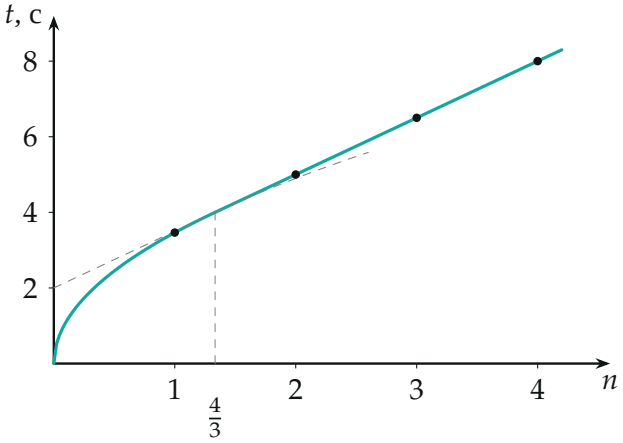


Рис. 3. Минимальное время подъёма в зависимости от числа этажей: до $n = 4/3$ — корень (график-треугольник), дальше — прямая (график-трапеция). Пунктир — продолжения формул туда, где они неверны.

Обратите внимание. Линейную формулу нельзя продолжать на один этаж: она дала бы 3,50 с — случайно близко к верному $2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ с (после округления оба — 3,5 с), но с отрицательным временем равномер-

ного движения, то есть физически неверно. Проверка условия $n \geqslant n_{\text{кр}}$ — обязательный шаг.

Ответ: 1) $t_3 = \dfrac{t_2 + t_4}{2} = 6{,}5$ с; 2) $t_1 = \sqrt{2(t_4 - t_2)(2t_2 - t_4)} = 2\sqrt{3}$ с $\approx 3{,}5$ с.

Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{с} \cdot \text{с}} = \text{с}$. Второй способ для t_1 через числа: $l_0/v_0 = 1{,}5$ с, $\tau = 2$ с; возьмём $v_0 = 1$ м/с, тогда $l_0 = 1{,}5$ м, $a_0 = 0{,}5$ м/с^2, и $t_1 = 2\sqrt{1{,}5/0{,}5} = 2\sqrt{3}$ с; проверка t_2: $2 \cdot 1{,}5 + 2 = 5$ с — верно. Предел: при $t_4 \to 2t_2$ время разгона $\tau \to 0$ и $n_{\text{кр}} \to 0$ — тогда лифт успевает набрать скорость и на одном этаже, и верна линейная формула $t_1 = l_0/v_0 = t_2/2$. У нас $n_{\text{кр}} = 4/3 > 1$, поэтому для одного этажа — формула треугольника.

Смысл: время разгона и торможения — постоянная «надбавка» к времени поездки, пока лифт успевает набрать полную скорость; на коротком перегоне он её не набирает, и время растёт как корень из расстояния.

Ответ. 1) $t_3 = \dfrac{t_2 + t_4}{2} = 6{,}5$ с; 2) $t_1 = \sqrt{2(t_4 - t_2)(2t_2 - t_4)} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ с.