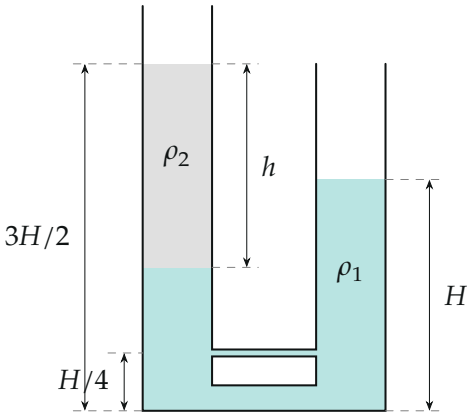
Сообщающиеся сосуды

Задача 2. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 9 класс, задача 2] «Сообщающиеся сосуды».

Два сообщающихся сосуда с одинаковой площадью сечения S соединены дополнительной тонкой трубочкой на высоте $\frac{H}{4}$ от их дна. В сосуды налили жидкость с плотностью ρ_1. После этого в левый сосуд добавили жидкость с плотностью $\rho_2 < \rho_1$, высота столба которой оказалась равной h (см. рисунок). Высота столба жидкости в правом сосуде равна H, а суммарная высота столба жидкости в левом сосуде равна $\frac{3H}{2}$. Жидкости не смешиваются.



1. Чему равна плотность ρ_2, если плотность ρ_1 известна?

В левом сосуде на жидкость положили массивный поршень. Поршень скользит без трения, а жидкость между поршнем и стенками сосуда не подтекает.

2. Определите, при какой массе m поршня верхние границы жидкостей в левом и правом сосуде в положении равновесия будут расположены на одном уровне.

▲ **Решение. Что происходит.** Это гидростатика сообщающихся сосудов: в покоящейся жидкости давление на одном горизонтальном уровне

внутри одной и той же жидкости одинаково. Поршень добавляет давление mg/S и выдавливает жидкость из левого сосуда в правый. Главная ловушка — трубочка на высоте $H/4$: если граница жидкостей в левом сосуде опустится до неё, лёгкая жидкость ρ_2 потечёт в правый сосуд и всплывёт там, и ответ изменится. Поэтому пункт 2 — перебор двух случаев.

Обозначения. Высоты отсчитываем от дна; p_0 — атмосферное давление (оно действует сверху на оба сосуда и сокращается); A и B — точки на уровне границы жидкостей в левом и правом сосуде.

Пункт 1. Равенство давлений. Граница ρ_2/ρ_1 в левом сосуде — на высоте $\dfrac{3H}{2} - h$. Ниже неё в обоих сосудах и в соединениях — одна жидкость ρ_1, поэтому давления в точках A и B на этой высоте равны (рис. 1). Над A — столб ρ_2 высотой h; над B — столб ρ_1 высотой $H - \left(\dfrac{3H}{2} - h\right) = h - \dfrac{H}{2}$:

$$p_0 + \rho_2 g h = p_0 + \rho_1 g\left(h - \frac{H}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \rho_2 = \rho_1\left(1 - \frac{H}{2h}\right).$$

Так как $\rho_2 > 0$, обязательно $h > \dfrac{H}{2}$; кроме того, граница выше трубочки: $\dfrac{3H}{2} - h > \dfrac{H}{4}$, то есть $h < \dfrac{5H}{4}$.

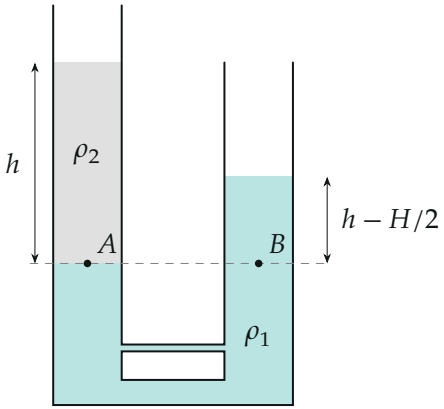


Рис. 1. Точки A и B на высоте границы жидкостей. Ниже — только ρ_1, давления в A и B равны; над ними столбы ρ_2 высотой h и ρ_1 высотой $h - H/2$.

Пункт 2. Где окажутся уровни. Поршень непроницаем и скользит по жидкости, верхняя граница слева — его нижняя грань. Сечения одинаковы, объём трубочки мал, поэтому сколько опустилось слева, столько поднялось справа. Уровни $\frac{3H}{2}$ и H сравняются посередине:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{3H}{2} + H\right) = \frac{5H}{4}:$$

слева уровень опустился на $\frac{H}{4}$, справа поднялся на $\frac{H}{4}$. Граница жидкостей в левом сосуде при этом опускается на $\frac{H}{4}$ — до высоты $\frac{5H}{4} - h$, если по пути не встретит трубочку. Она встречает трубочку, если $\frac{5H}{4} - h \leqslant \frac{H}{4}$, то есть при $h \geqslant H$. Отсюда два случая.

Случай 1: $\frac{H}{2} < h \leqslant H$**.** Граница остаётся выше трубочки, жидкость ρ_2 вся в левом сосуде (рис. 2). Условие равновесия — равенство давлений у дна (под дном обоих сосудов одна жидкость ρ_1):

$$p_0 + \frac{mg}{S} + \rho_2 g h + \rho_1 g\left(\frac{5H}{4} - h\right) = p_0 + \rho_1 g\,\frac{5H}{4} \quad \Longrightarrow \quad m = (\rho_1 - \rho_2)hS.$$

Из пункта 1 $(\rho_1 - \rho_2)h = \rho_1\frac{H}{2}$, поэтому

$$m = \frac{\rho_1 HS}{2}.$$

Масса не зависит от h: поршень должен заменить собой «недостающий» вес — лёгкая жидкость легче такого же столба тяжёлой на $(\rho_1 - \rho_2)hS$.

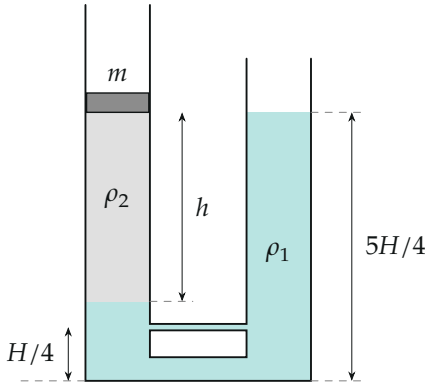


Рис. 2. Случай 1 ($h \leqslant H$): с поршнем уровни на высоте $5H/4$, граница ρ_2/ρ_1 слева выше трубочки.

Случай 2: $H < h < \dfrac{5H}{4}$**.** Граница доходит до трубочки, и дальше жидкость ρ_2 перетекает через неё в правый сосуд и всплывает там наверх ($\rho_2 < \rho_1$). Слева граница остаётся на высоте $\dfrac{H}{4}$: ниже — ρ_1, выше до поршня — столб ρ_2 высотой $\dfrac{5H}{4} - \dfrac{H}{4} = H$. Перетекло ρ_2 столбом $h - H$ — он лежит наверху в правом сосуде. Под ним ρ_1 высотой $\dfrac{5H}{4} - (h - H) = \dfrac{9H}{4} - h$ (рис. 3). Равенство давлений у дна:

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 g H + \rho_1 g \frac{H}{4} = \rho_1 g \left(\frac{9H}{4} - h \right) + \rho_2 g (h - H),$$

$$m = [\rho_1(2H - h) - \rho_2(2H - h)]S = (\rho_1 - \rho_2)(2H - h)S = \rho_1 \frac{H(2H - h)}{2h} S.$$

В последнем шаге снова подставили $\rho_1 - \rho_2 = \rho_1 \dfrac{H}{2h}$.

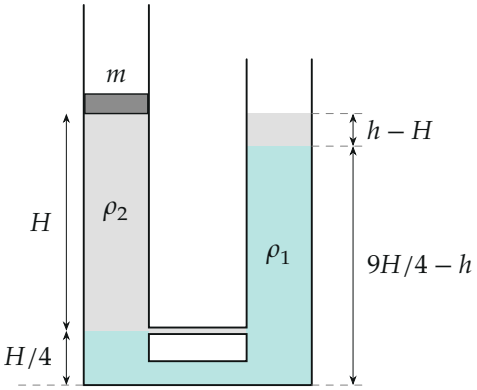


Рис. 3. Случай 2 ($h > H$): часть жидкости ρ_2 перетекла через трубочку в правый сосуд и всплыла; слева граница на уровне трубочки.

Как масса зависит от h. На рис. 4 — $m/(\rho_1 HS)$ по формулам обоих случаев: при $h \leqslant H$ это $\frac{1}{2}$, дальше убывает до 0,3 при $h = \frac{5H}{4}$. При $h = H$ обе формулы дают $\dfrac{\rho_1 HS}{2}$ — переход непрерывный.

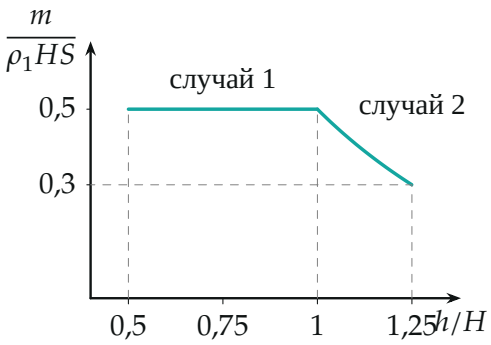


Рис. 4. Масса поршня в зависимости от высоты столба лёгкой жидкости h (допустимо $H/2 < h < 5H/4$).

Обратите внимание. В случае 2 уровни считаем от того, что часть ρ_2 ушла направо: столб ρ_2 слева уже не h, а H. Формула случая 1, применённая при $h > H$, дала бы неверную массу.

Ответ: 1) $\rho_2 = \rho_1\left(1 - \dfrac{H}{2h}\right)$; 2) при $h \leqslant H$: $m = \dfrac{\rho_1 HS}{2}$; при $H < h < \dfrac{5H}{4}$: $m = \rho_1 \dfrac{H(2H - h)}{2h} S$.

Проверка. Размерность: кг/м^3·м·м^2 = кг. Пункт 1, второй способ — давления у дна: $\rho_2 g h + \rho_1 g\left(\frac{3H}{2} - h\right) = \rho_1 g H$ — то же уравнение. Пределы: $h \to H/2$ — $\rho_2 \to 0$ (невесомая жидкость), и в случае 1 $m = (\rho_1 - \rho_2)hS \to \rho_1 HS/2$ — поршень заменяет столб ρ_1 высотой $H/2$, как и должно быть. При $h = H$ формулы случаев совпадают.

Смысл: масса поршня равна «недостаче» веса левого столба по сравнению с правым; пока лёгкая жидкость вся слева, недостача постоянна, а когда она частично уходит направо, недостача уменьшается.

Ответ. 1) $\rho_2 = \rho_1\left(1 - \dfrac{H}{2h}\right)$; 2) при $h \leqslant H$: $m = \rho_1 \dfrac{H}{2} S$; при $H < h < \dfrac{5H}{4}$: $m = \rho_1 \dfrac{H(2H - h)}{2h} S$.