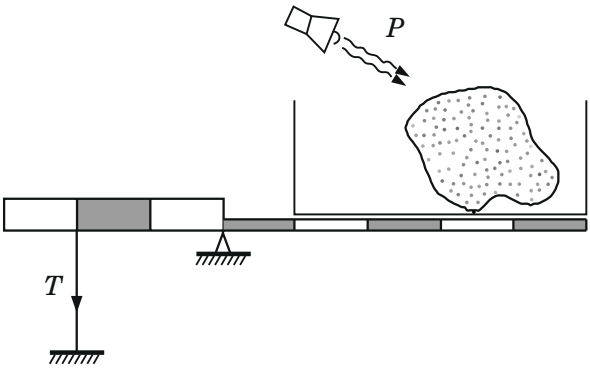
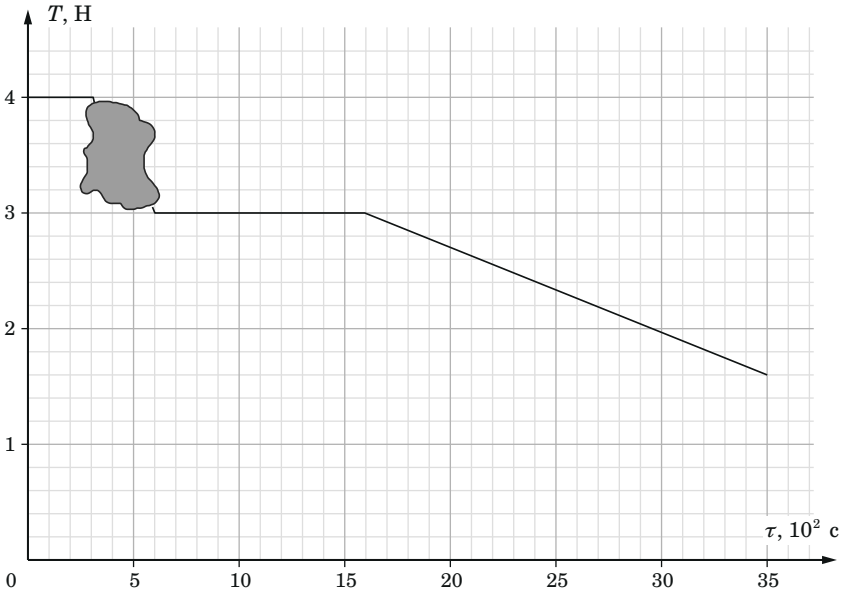
Эквилибр

Задача 3. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 9 класс, задача 3] «Эквилибр».

На неоднородном рычаге, установленном на опору, стоит вертикальный сосуд прямоугольного сечения. Слева рычаг привязан тонкой невесомой нитью к жесткому основанию. При этом нить не натянута, рычаг горизонтален.



В сосуд кладут кусок льда, после чего нагревают его содержимое с постоянной мощностью (тепловыми потерями, а также теплоёмкостью сосуда можно пренебречь). Одновременно с этим строят график зависимости силы натяжения нити от времени (начало графика совпадает с моментом начала нагрева). График приведён на рисунке. Один из участков графика утерян по неосторожности экспериментатора (на него пролилась тушь).



Определите, что произошло в конце утерянного участка графика (момент перелома). А также найдите:

1. массу m куска льда;
2. мощность P, с которой нагревали содержимое сосуда;
3. начальную температуру t_0 льда.

Отметки на рычаге делят его на 8 равных по длине частей. Боковая грань сосуда параллельна плоскости рисунка.

Справочные данные: удельная теплоёмкость льда 2100 Дж/(кг·°С), удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, удельная теплота парообразования воды 2300 кДж/кг.

▲ **Решение. Что происходит.** Пустой сосуд на рычаге нить не натягивает, значит, натяжение T создаёт только содержимое сосуда — через свой вес и плечо своего центра масс относительно опоры. По правилу моментов T меняется по двум причинам: сдвинулся центр масс содержимого (лёд растаял, лёд всплыл) или изменилась масса (вода выкипает). Читаем график участок за участком и узнаём, что происходило с содержимым. Класс задачи — статика рычага + тепловой баланс с графиком.

Обозначения. a — длина одной восьмой части рычага; T — натяжение нити; m — масса льда; $c_л$, $c_в$ — удельные теплоёмкости льда и воды; λ — удельная теплота плавления; L — удельная теплота парообразования; $g = 10$ м/с^2.

1. Правило моментов для рычага. По рисунку условия нить привязана на $2a$ левее опоры, сосуд занимает отметки от a до $5a$ правее опоры (рис. 1). Рычаг с пустым сосудом уравновешен сам (нить не натянута), поэтому моменты веса рычага и сосуда относительно опоры в сумме дают ноль, и в правило моментов входят только натяжение нити и вес содержимого массы M с центром масс на расстоянии d правее опоры:

$$T \cdot 2a = Mg\,d \quad \Rightarrow \quad T = \frac{Mg\,d}{2a}. \tag{1}$$

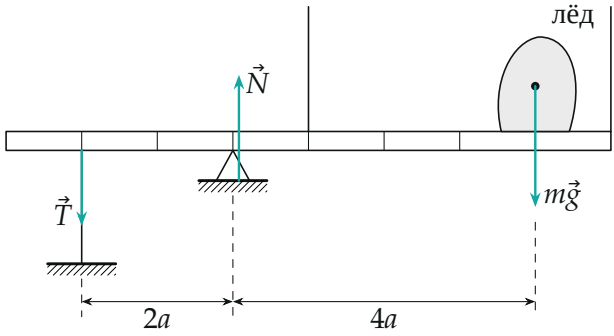


Рис. 1. Силы, которые входят в правило моментов относительно опоры (вес рычага и пустого сосуда уравновешены сами и не нарисованы). Лёд лежит у правой стенки, его центр масс — на $4a$ от опоры.

2. Что происходит на каждом участке графика. По (1) натяжение пропорционально произведению Md — «моменту» содержимого (рис. 2).

- *Участок 1* ($0 < \tau < 300$ с, $T_1 = 4$ Н). Лёд греется до 0 °C, ничего не сдвигается и не испаряется — T постоянно. По (1) центр масс льда на $d_1 = \dfrac{2aT_1}{mg}$.

- *Участок 2* (утерян, $300 < \tau < 600$ с). Лёд тает, вода стекает и растекается по дну равномерно, центр масс содержимого сдвигается к середине сосуда — T падает.
- *Перелом в конце участка 2.* После перелома T снова постоянно. Если бы лёд таял дальше, лёжа на дне, центр масс двигался бы и дальше; постоянство значит, что положение центра масс больше не зависит от того, сколько льда осталось. Это случилось, когда **оставшийся лёд всплыл** (оторвался от дна): плавающий лёд и вода давят на дно так же, как одна вода, — давление на дно везде $\rho_в g h$, и центр масс содержимого оказался над серединой дна, на $3a$ от опоры.
- *Участок 3* ($600 < \tau < 1600$ с, $T_3 = 3$ Н). Плавающий лёд дотаивает, потом вода греется до 100 °C: масса и центр масс не меняются.
- *Участок 4* ($\tau > 1600$ с). Вода кипит и выкипает: $d = 3a$, масса M убывает, T падает линейно — мощность постоянна.

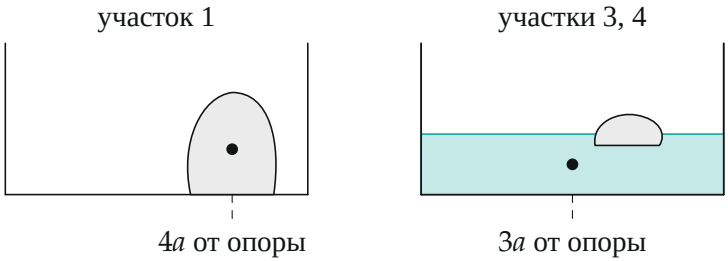


Рис. 2. Слева: лёд лежит на дне у правой стенки, центр масс на $4a$ правее опоры. Справа: лёд всплыл, давление на дно одинаково по всему дну, центр масс содержимого — над серединой дна, на $3a$.

Проверим, что участку 1 действительно отвечает $d_1 = 4a$: подставим m из шага 3 в (1), $d_1 = \dfrac{2a \cdot 4}{0{,}2 \cdot 10} = 4a$ — центр масс льда у правой стенки, как на рисунке условия.

3. Масса льда. Правило моментов (1) на участке 3, где $M = m$, $d = 3a$:

$$T_3 \cdot 2a = mg \cdot 3a \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2T_3}{3g} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 10} = 0{,}2 \text{ кг}.$$

4. Мощность. На участке 4 по (1) $T = \frac{3g}{2}M$, значит, скорость убыли массы воды

$$\frac{\Delta M}{\Delta\tau} = \frac{2}{3g}\frac{\Delta T}{\Delta\tau}.$$

Вся подводимая теплота идёт на испарение (температура кипящей воды постоянна), закон сохранения энергии за время $\Delta\tau$: $P\Delta\tau = L\Delta M$. Возьмём на графике узлы сетки (1600 с; 3,0 Н) и (3200 с; 1,8 Н) (рис. 3): $\Delta T = 1{,}2$ Н, $\Delta\tau = 1600$ с, $\Delta M = \frac{2\cdot 1{,}2}{3\cdot 10} = 0{,}08$ кг,

$$P = \frac{L\,\Delta M}{\Delta\tau} = \frac{2{,}3\cdot 10^6\cdot 0{,}08}{1600} \approx 115\ \text{Вт}.$$

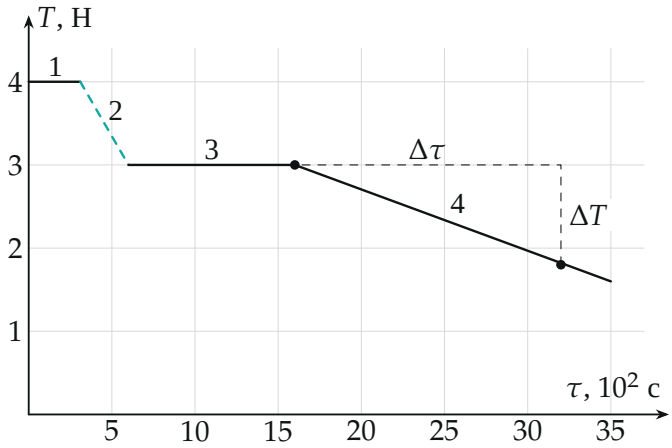


Рис. 3. График из условия: номера участков, утерянный участок 2 — пунктиром (лёд тает на дне, затем всплывает), точки для наклона участка 4.

5. Начальная температура. Закон сохранения энергии от начала нагрева до закипания ($\tau_3 = 1600$ с): теплота $P\tau_3$ ушла на нагрев льда от t_0 до 0 °C, его плавление и нагрев воды до 100 °C (рис. 4):

$$P\tau_3 = c_л m(0 - t_0) + \lambda m + c_в m\cdot 100\,^\circ\text{C},$$

$$t_0 = -\frac{P\tau_3 - \lambda m - c_в m\cdot 100\,^\circ\text{C}}{c_л m},$$

$$t_0 = -\frac{184\,000 - 66\,000 - 84\,000}{2100 \cdot 0{,}2}\,^\circ\text{C} \approx -81\,^\circ\text{C}.$$

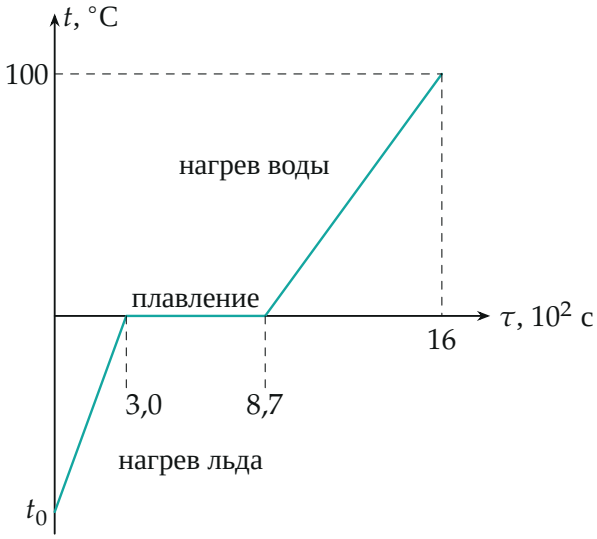


Рис. 4. Температура содержимого при $P = 115$ Вт: нагрев льда ≈ 300 с, плавление $\lambda m/P \approx 570$ с, нагрев воды $c_в m \cdot 100/P \approx 730$ с — вместе как раз 1600 с.

Обратите внимание. Если бы лёд не всплыл, а дотаял на дне, перелом пришёлся бы на конец плавления, $\tau \approx 870$ с. На графике он на 600 с — лёд всплыл раньше, чем растаял. Время участка 1 подтверждает ответ: нагрев льда от $-81\,^\circ$C занимает $c_л m \cdot 81/P \approx 300$ с, и ровно тогда кончается горизонтальный участок 1.

Проверка. Размерности: $[L\Delta M/\Delta\tau] = $ Дж/с $=$ Вт; $[cmt] = $ Дж. Знак: $t_0 < 0$, как и должно быть у льда. Мощность P из наклона участка 4 читается с точностью до деления сетки, поэтому t_0 известна до нескольких градусов — она мала разностью больших чисел.

Ответ. В конце утерянного участка оставшийся лёд всплыл (оторвался от дна); 1) $m = \dfrac{2T_3}{3g} = 0{,}2$ кг; 2) $P \approx 115$ Вт; 3) $t_0 \approx -81\,^\circ$C.