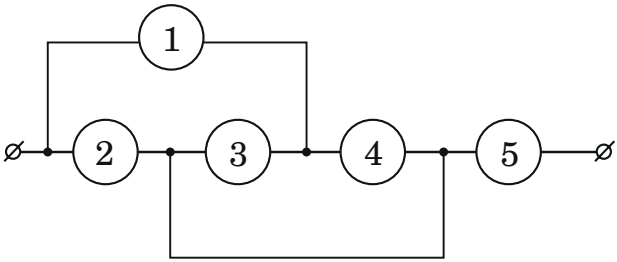
Запутанная схема

Задача 4. [ВсОШ 2023/24, региональный этап, 9 класс, задача 4] «Запутанная схема».

Школьник из трёх одинаковых вольтметров и двух одинаковых амперметров собрал электрическую цепь, схема которой показана на рисунке. Школьник был не очень внимательным и забыл, какие приборы были установлены в каком месте схемы, но записал показания приборов. Вольтметры показывали 2 В, 12 В и 14 В, показания амперметров 200 мкА и 520 мкА.



1. Определите, на каких местах в схеме стояли амперметры, а на каких — вольтметры.
2. Определите внутренние сопротивления вольтметров и амперметров.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вольтметр и амперметр здесь — просто резисторы: вольтметр с сопротивлением R_V показывает напряжение на себе, амперметр с сопротивлением R_A — ток через себя. Значит, у каждого прибора есть и ток, и напряжение, связанные законом Ома. Сначала перерисуем схему, чтобы увидеть параллельные и последовательные участки, затем перебором отбросим расстановки, которые противоречат отношениям показаний. Класс задачи — закон Ома и правила Кирхгофа для неидеальных приборов.

Обозначения. R_V, R_A — сопротивления вольтметра и амперметра; U_i, I_i — напряжение на приборе i и ток через него ($i = 1, \dots, 5$).

1. Перерисуем схему. Обозначим узлы: P — левый узел у клеммы, Q — узел между приборами 2 и 3 (он же, через нижний провод, — узел

между 4 и 5), S — узел между 3 и 4. Тогда прибор 1 включён между P и S, прибор 2 — между P и Q, приборы 3 и 4 — оба между Q и S, прибор 5 — от Q к правой клемме (рис. 1).

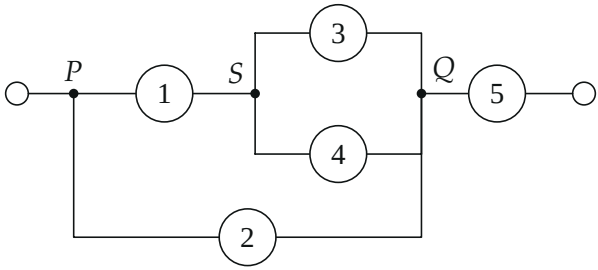


Рис. 1. Та же схема, перерисованная по узлам: приборы 3 и 4 параллельны, ветвь «1 + (3 ‖ 4)» параллельна прибору 2, последовательно с ними — прибор 5.

Отсюда три следствия:

- приборы 3 и 4 под одним напряжением; два одинаковых прибора показали бы одно и то же, а все показания разные, поэтому *один из них вольтметр, другой амперметр*. Пусть для определённости 3 — амперметр, 4 — вольтметр (они параллельны, их можно поменять местами);
- по первому правилу Кирхгофа для узла S ток прибора 1 равен $I_1 = I_3 + I_4$;
- по закону Ома для параллельных ветвей $U_2 = U_1 + U_4$ (напряжение между P и Q).

2. Прибор 1 — не амперметр. Допустим, 1 — амперметр (рис. 2). Тогда амперметры — 1 и 3, а 2 и 5 — вольтметры. Ток $I_1 = I_3 + I_4 > I_3$, значит, $I_1 = 520$ мкА, $I_3 = 200$ мкА. Амперметр 3 параллелен вольтметру 4, по закону Ома $R_A = U_4/I_3$. Тогда напряжение на амперметре 1

$$U_1 = I_1 R_A = \frac{I_1}{I_3} U_4 = 2{,}6\, U_4,$$

и вольтметр 2 показал бы $U_2 = U_1 + U_4 = 3{,}6\, U_4$. Но среди показаний вольтметров (2, 12, 14 В) нет пары с отношением 3,6. Противоречие — прибор 1 вольтметр.

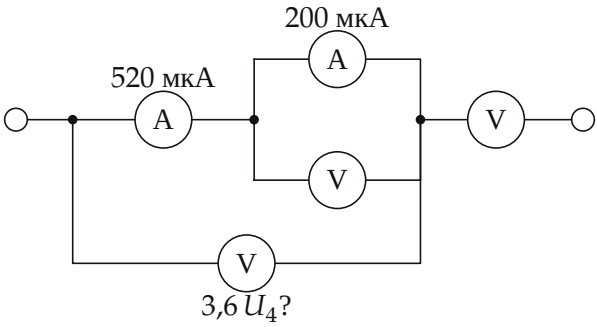


Рис. 2. Гипотеза «1 — амперметр»: вольтметр 2 должен показать $3{,}6\,U_4$, а такой пары показаний нет.

3. Прибор 2 — вольтметр, прибор 5 — амперметр. Прибор 1 — вольтметр, и через него идёт ток $I_1 = I_3 + I_4 > I_4$, поэтому $U_1 = I_1 R_V > U_4$. Если 2 — вольтметр, $U_2 = U_1 + U_4$ больше обоих; если вольтметр 5, через него идёт ток $I_1 + I_2$ всей цепи и он тоже показывает больше U_1. В любом случае самое маленькое показание вольтметров у прибора 4: $U_4 = 2$ В. Тогда U_1 — среднее, $U_1 = 12$ В, и $U_2 = U_1 + U_4 = 14$ В — ровно третье показание.

Допустим всё же, что 2 — амперметр. Тогда по закону Ома $I_2 = U_2/R_A = \dfrac{U_2}{U_4} I_3 = 7I_3$, а показания амперметров отличаются в $520/200 = 2{,}6$ раза. Противоречие — **вольтметры 1, 2, 4, амперметры 3, 5** (рис. 3).

4. Сопротивления. Амперметр 5 стоит последовательно со всей цепью, через него идёт сумма токов $I_3 + I_4 + I_2 > I_3$, значит, $I_5 = 520$ мкА, $I_3 = 200$ мкА. По закону Ома для амперметра 3, параллельного вольтметру 4:

$$R_A = \frac{U_4}{I_3} = \frac{2}{200 \cdot 10^{-6}}\ \text{Ом} = 10\ \text{кОм}.$$

Первое правило Кирхгофа для узла S, токи вольтметров по закону Ома:

$$\frac{U_1}{R_V} = I_3 + \frac{U_4}{R_V} \quad \Rightarrow \quad R_V = \frac{U_1 - U_4}{I_3} = \frac{12 - 2}{200 \cdot 10^{-6}}\ \text{Ом} = 50\ \text{кОм}.$$

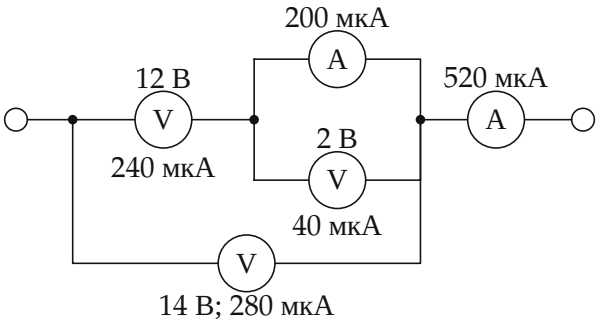


Рис. 3. Ответ: показания приборов и токи вольтметров по найденным $R_V = 50$ *кОм:* $240 = 200 + 40$, $240 + 280 = 520$.

Обратите внимание. Условие не различает приборы 3 и 4: они параллельны, и ответ «3 — амперметр, 4 — вольтметр» равноправен с обратным. Перебор в шагах 2–3 опирается только на то, что все пять показаний разные и отношения 3,6 и 7 не встречаются.

Проверка. Токи вольтметров: $I_1 = 12/50$ мА $= 240$ мкА $= I_3 + I_4 = 200 + 40$; $I_2 = 14/50$ мА $= 280$ мкА; через амперметр 5 — $I_1 + I_2 = 520$ мкА, ровно второе показание (рис. 3). Напряжение на амперметре 5 — 5,2 В, его школьник не видит, противоречий нет.

Ответ. 1) Приборы 1, 2 и 4 — вольтметры, 3 и 5 — амперметры (3 и 4 можно поменять местами); 2) $R_A = \dfrac{U_4}{I_3} = 10$ кОм, $R_V = \dfrac{U_1 - U_4}{I_3} = 50$ кОм.