Тепловое сопротивление

Задача 1. [ВсОШ 2023/24, 10 класс, задача 1] «Тепловое сопротивление».

Оборудование: установка (см. рис.), струбцина для фиксации установки на столе, два куска проволоки, канцелярская кнопка, два стакана разного размера, пластиковая бутылка, термометр, два мультиметра, источник питания, три пары проводов «банан–крокодил», шприц, горячая вода и вода примерно комнатной температуры по требованию.

Погрешность мультиметра и термометра считайте равной трём единицам последнего разряда.

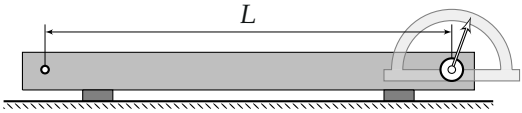


Схема установки

Расстояние L указано на установке с точностью 2 мм, радиус средней части колёсика $r = (3{,}50 \pm 0{,}05)$ мм. Масса пластиковой бутылки $m_0 = (16{,}2 \pm 0{,}2)$ г. Выданные куски проволоки сделаны из одного и того же неизвестного сплава, имеют длины $l_1 = (100{,}0 \pm 0{,}2)$ см, $l_2 = (150{,}0 \pm 0{,}2)$ см и одинаковый диаметр $d = (0{,}150 \pm 0{,}002)$ мм. Плотность воды $\rho = 1{,}00$ г/см^3, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Относительным удлинением $\varepsilon = \Delta l / l$ называется отношение изменения длины проволоки Δl к её начальной длине l.

Модуль Юнга E характеризует упругие свойства материала проволоки и связывает её относительное удлинение ε с растягивающей силой F:

$$F = ES\varepsilon,$$

где S — площадь поперечного сечения проволоки.

Коэффициент теплового расширения β характеризует изменение линейных размеров тела при изменении температуры. Длина проволоки $l(t + \Delta t)$ при температуре $t + \Delta t$ связана с её длиной $l(t)$ при температуре t формулой

$$l(t + \Delta t) = l(t) \cdot (1 + \beta \Delta t).$$

Важно! Для уменьшения вклада трения перед выполнением экспериментов убедитесь, что колёсико не касается транспортира и головки винта. Не прикладывайте к проволоке силу, превышающую 3,0 Н, так как это может привести к необратимым её деформациям.

1. Снимите зависимость относительного удлинения проволоки ε от растягивающей её силы F. Постройте график полученной зависимости. Определите модуль Юнга E материала проволоки и оцените его погрешность.
2. Снимите зависимость относительного удлинения участка проволоки ε и напряжения U на его концах от силы тока I, который течёт через него. То есть для каждого значения силы тока I определите значение ε и U. Проведите эксперимент, сначала увеличивая силу тока в диапазоне от 0 А до 2 А, и затем, не выключая источник, уменьшая силу тока в том же диапазоне. Предложите две величины, выраженные через U, I и ε, зависимость между которыми предположительно линейна. Постройте график этой зависимости.
3. Предложите метод, позволяющий определить коэффициент теплового расширения β проволоки. Проведите серию измерений, необходимых для определения β. Обработайте результаты измерений при помощи линеаризованного графика. Найдите значение β и оцените его погрешность.

▲ **Решение. Что происходит.** Проволока растягивается подвешенной бутылкой; её конец перекинут через колёсико со стрелкой, и удлинение Δl поворачивает колёсико на угол $\Delta\varphi = \Delta l/r$ — это «рычажный» усилитель удлинения. По удлинению от веса воды находим модуль Юнга. Ток нагревает проволоку: она удлиняется (коэффициент β) и её сопротивление растёт (коэффициент α). Температуру проволоки мы не знаем, но обе величины ей пропорциональны — поэтому ε против $\Delta R/R_0$ даёт прямую с наклоном β/α, а α находим отдельно в горячей воде. Класс задачи — косвенные измерения с линеаризацией.

Обозначения. φ — угол стрелки, φ_0 — начальный; V — объём воды; $S = \pi d^2/4 = 1{,}77 \cdot 10^{-8}$ м^2; R_0 — сопротивление при комнатной температуре; Δt — нагрев.

Пункт 1. Модуль Юнга.

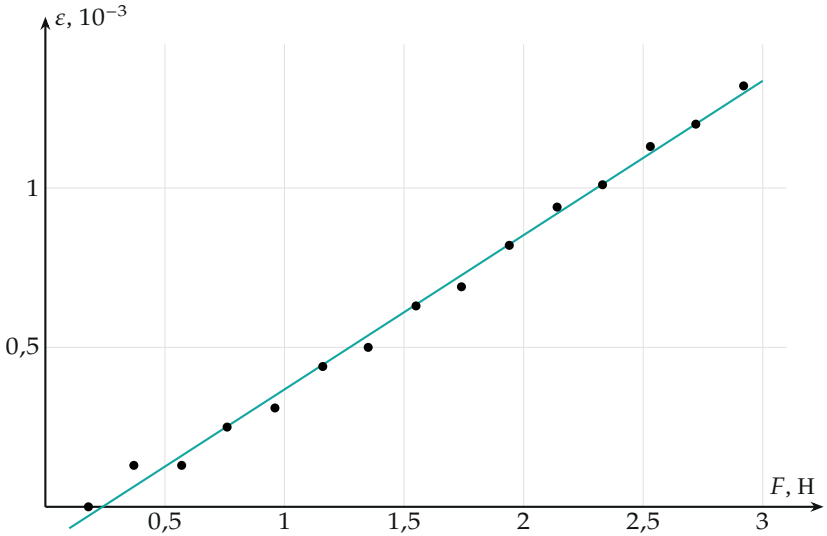
1. Удлинение по углу. Колёсико поворачивается без проскальзывания проволоки, поэтому её удлинение равно длине дуги: $\Delta l = r(\varphi - \varphi_0)$, где угол в радианах; длина рабочего участка — L:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{(\varphi - \varphi_0)\, r}{L}.$$

Сила — вес бутылки с водой: $F = (\rho V + m_0)g$. Погрешности: $\Delta\varepsilon = \frac{\pi}{180} \cdot 1^\circ \cdot r/L \approx 6 \cdot 10^{-5}$ (цена деления 1°), $\Delta F \approx F \cdot 0{,}5/20$ (шприц).

2. Измерения (наливаем воду по 20 мл; данные авторской установки — масса бутылки и проволока у неё свои):

F, Н	0,18	0,37	0,57	0,76	0,96	1,16	1,35	1,55
ε, 10^{-3}	0	0,13	0,13	0,25	0,31	0,44	0,50	0,63
F, Н	1,74	1,94	2,14	2,33	2,53	2,72	2,92	
ε, 10^{-3}	0,69	0,82	0,94	1,01	1,13	1,20	1,32	



Зависимость $\varepsilon(F)$ и прямая МНК. Прямая не проходит через нуль: при малых силах мешает трение в оси колёсика.

3. Обработка. По закону Гука $F = ES\varepsilon$, то есть $\varepsilon = F/(ES)$: наклон прямой $k_1 = 1/(ES)$. МНК: $k_1 = (0{,}484 \pm 0{,}009) \cdot 10^{-3}$ Н$^{-1}$.

$$E = \frac{1}{k_1 S} = \frac{1}{0{,}484 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}77 \cdot 10^{-8}}\ \text{Па} \approx 117\ \text{ГПа}.$$

Погрешность: $\Delta E/E = \Delta k_1/k_1 + 2\Delta d/d + \Delta r/r \approx 2\,\% + 2{,}7\,\% + 1{,}4\,\% \approx 6\,\%$:

$$E = (117 \pm 7)\ \text{ГПа}$$

(медь: 118 ГПа).

Пункт 2. Нагрев током.

1. Схема. Источник, амперметр и проволока — последовательно, вольтметр — параллельно проволоке; к проволоке подвешена бутылка с ≈ 100 мл воды, чтобы выйти из зоны застоя колёсика. $R = U/I$; R_0 — при малом токе ($I = 82$ мА): $R_0 = 1{,}041$ Ом.

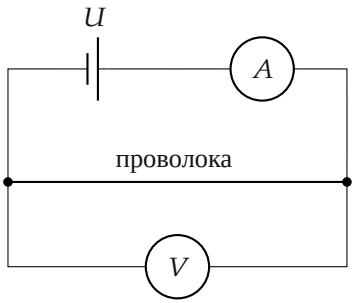


Схема измерения сопротивления и удлинения проволоки при нагреве током.

2. Какие величины линейны. Сопротивление $R = R_0(1+\alpha\Delta t)$, удлинение $\varepsilon = \beta\Delta t$. Исключаем неизвестный нагрев Δt:

$$\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\Delta R}{R_0}.$$

Предлагаемые величины: $x = \Delta R/R_0 = \dfrac{U/I - R_0}{R_0}$ и ε. (Другая пара: ε и мощность IU — если теплоотдача пропорциональна Δt, то $IU = k_{\text{пот}}\Delta t$ и $\varepsilon \propto IU$.)

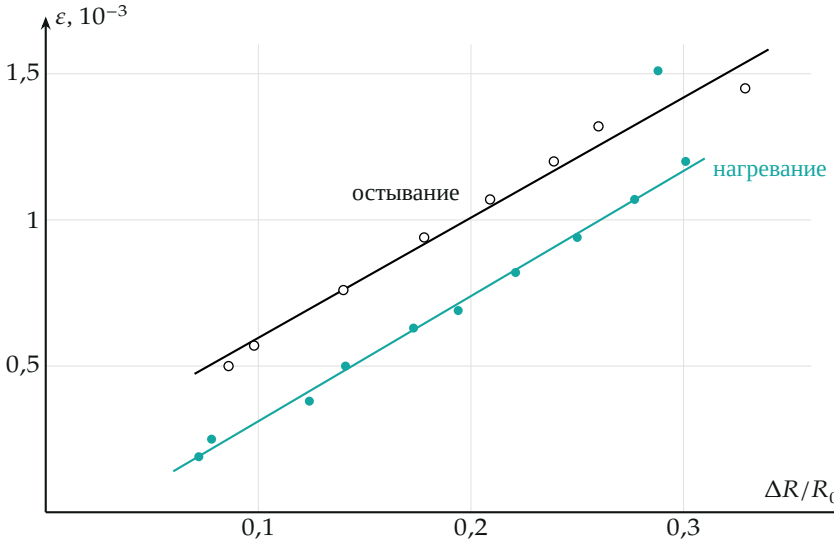
3. Измерения (ε в 10^{-3}):

нагревание

I, А	0,75	0,86	1,07	1,21	1,35	1,45
U, В	0,837	0,965	1,252	1,438	1,649	1,803
$\Delta R/R_0$	0,072	0,078	0,124	0,141	0,173	0,194
ε	0,19	0,25	0,38	0,50	0,63	0,69
I, А	1,56	1,66	1,73	1,83	2,02	
U, В	1,984	2,16	2,30	2,48	2,71	
$\Delta R/R_0$	0,221	0,250	0,277	0,301	0,288	
ε	0,82	0,94	1,07	1,20	1,51	

остывание

I, А	1,93	1,76	1,62	1,51	1,37	1,18	0,99	0,82
U, В	2,67	2,31	2,09	1,901	1,68	1,401	1,132	0,927
$\Delta R/R_0$	0,329	0,260	0,239	0,209	0,178	0,140	0,098	0,086
ε	1,45	1,32	1,20	1,07	0,94	0,76	0,57	0,50



ε от $\Delta R/R_0$: нагревание (бирюзовые точки) и остывание (белые). Две параллельные прямые сдвинуты — гистерезис из-за трения в колёсике.

4. Обработка. Ветви не совпадают: при смене нагрева на остывание сила трения в оси колёсика меняет направление, и стрелка «отстаёт». Но наклоны — одинаковы в пределах погрешности. МНК (последнюю точку нагрева, где ток резко увеличили и проволока не успела прогреться, не берём): $k_{\text{наг}} = (4{,}3 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}$, $k_{\text{ост}} = (4{,}1 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}$ (погрешность — с учётом $\Delta(\Delta R) \approx 0{,}04$ Ом от амперметра на пределе 10 А):

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{k_{\text{наг}} + k_{\text{ост}}}{2} = (4{,}2 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}.$$

Обратите внимание: усреднять нужно наклоны, а не точки обеих ветвей вместе — сдвиг ветвей дал бы ложный наклон.

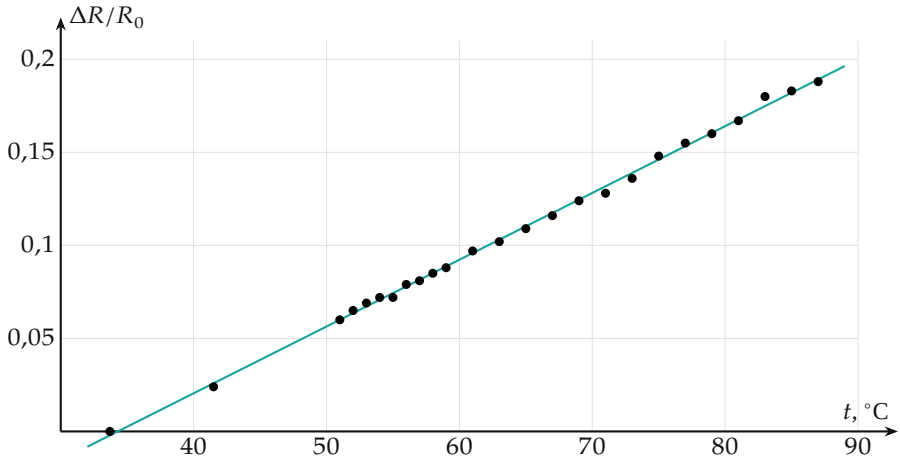
Пункт 3. Коэффициент β.

1. Метод. Отношение β/α есть, нужно α отдельно. Короткий кусок проволоки помещаем в горячую воду (витки не касаются друг друга — проволока продета через отверстия в стаканчике), даём малый ток (до 200 мА, чтобы ток сам не грел), измеряем U, I и температуру воды при её остывании. R_0 — при 33,7 °C.

2. Данные ($\Delta R/R_0$ по $R = U/I$):

t, °C	87	83	79	75	71	67	63	59
$\Delta R/R_0$	0,188	0,180	0,160	0,148	0,128	0,116	0,102	0,088
t, °C	56	53	51	41,5	33,7			
$\Delta R/R_0$	0,079	0,069	0,060	0,024	0			

(в таблице через одну точку, в обработке — все 25).



$\Delta R/R_0$ от температуры воды: прямая, наклон — α.

3. Обработка. МНК: $\alpha = (3{,}58 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-3}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$ (медь: $3{,}93 \cdot 10^{-3}$). Тогда

$$\beta = \alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 3{,}58 \cdot 10^{-3} \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-3} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-5}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1},$$

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} \approx \frac{0{,}4}{4{,}2} + \frac{0{,}06}{3{,}58} \approx 11\,\%,$$

$$\beta = (1{,}5 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-5}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$$

(медь: $1{,}7 \cdot 10^{-5}$ — в пределах погрешности). Строго $R = \rho l/S$ меняется ещё из-за теплового расширения ($\Delta R/R = (\gamma - \beta)\Delta t$), но $\beta \ll \gamma$, и $\alpha \approx \gamma$.

Проверка. Размерность: $1/(k_1 S)$ — Н/м^2; β/α — безразмерно. Цена деления стрелки: по таблице ε растёт на $6{,}3 \cdot 10^{-5}$ на градус, отсюда $L = \frac{\pi}{180} \cdot r/6{,}3 \cdot 10^{-5} \approx 0{,}97$ м — разумная длина установки. Все три результата близки к табличным для меди. У организаторов $E = (113 \pm 7)$ ГПа, $\beta/\alpha = (4{,}4 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}$, $\beta = (1{,}7 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-5}$ — совпадает с нашим в пределах погрешности (МНК по их же таблицам даёт чуть другие наклоны).

Ответ. 1) $\varepsilon \propto F$, $E = (117 \pm 7)$ ГПа; 2) линейны ε и $\Delta R/R_0 = (U/I - R_0)/R_0$ (или ε и IU), наклон $\beta/\alpha = (4{,}2 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}$; 3) $\alpha = (3{,}58 \pm$

$0{,}06) \cdot 10^{-3}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$, $\beta = (1{,}5 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-5}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$.