Немокрая вода

Задача 1. [ВсОШ 2023/24, заключительный этап, 11 класс, практический тур, задача 1] «Немокрая вода».

Характеристики некоторых веществ могут показаться неожиданными в сравнении с другими веществами, часто встречающимися в нашей жизни. В данной работе Вам предлагается, используя весьма ограниченный набор оборудования, придумать методы и определить некоторые физические характеристики одного из таких веществ, которое часто называют «сухой водой». Учтите, что количество этого вещества ограничено, и Вы должны тщательно продумывать свои действия, чтобы обойтись той порцией, что предоставлена в Ваше распоряжение. Дополнительная жидкость Вам выдаваться не будет! В целях её экономии рекомендуется при выполнении задания отливать небольшую часть в баночку с крышкой. Если в Вашем эксперименте жидкость оказалась в одном сосуде с водой, то обратите внимание на то, что обычная вода и «сухая вода» не смешиваются и разделены между собой. Для извлечения «сухой воды» из сосуда достаточно откачать её с помощью шприца.

Чтобы Вы могли работать спокойно, сообщаем, что исследуемые жидкость и её пары не токсичны, она не горючая, не вступает в какие-либо химические реакции с водой и оборудованием. При этом она весьма летучая (быстро испаряется), её температура кипения ниже 60 °C.

Примите атмосферное давление равным $p_0 = 100$ кПа и ускорение свободного падения равным $g = 9{,}8$ м/с^2.

Задание. Перед началом выполнения работы укажите номер пакета с оборудованием. Обратите внимание, что оборудование указано к каждой части задачи отдельно. Использование оборудования из других частей запрещено. Пенопластовые стаканчики в перечень оборудования не входят и нужны для хранения холодной и горячей воды.

Часть 1. В данной части задачи требуется оценка погрешности только однократного измерения, проведение многократных измерений не требуется.

1.1. Определите плотность жидкости при комнатной температуре (комнатную температуру запишите).

1.2. Определите коэффициент объёмного теплового расширения жидкости в диапазоне температур приблизительно [20–40] °C. Обратите внимание на то, что сосуд, в который помещается исследуемая жидкость, также изменяет свой объём при изменении температуры. Считая, что плотность воды при изменении температуры от 20 °C до 40 °C уменьшается на $\Delta\rho_в = 7{,}0$ кг/м^3, учтите влияние объёмного расширения сосуда, в который будет помещена «сухая вода» во время опыта по измерению её коэффициента объёмного расширения. Для получения результата достаточно использовать измерения при двух разных температурах.

Примечание. Коэффициент объёмного теплового расширения β — физическая величина, характеризующая относительное изменение объёма тела с увеличением температуры на 1 К при постоянном давлении:

$$\beta = \frac{\Delta V}{V\,\Delta T},$$

где V — объём жидкости, ΔV — приращение объёма жидкости при изменении температуры на малую величину ΔT.

Оборудование: «сухая вода» в бутылке, весы электронные, баночка с крышкой, термометр электронный, штатив с лапкой и муфтой, мерный цилиндр 250 мл, ведёрко для слива воды, горячая вода (по требованию), вода при комнатной температуре (по требованию), шприц 10 мл, шприц 1 мл, линейка 30 см, силиконовая трубка большого сечения, поднос, салфетки для поддержания чистоты на рабочем месте.

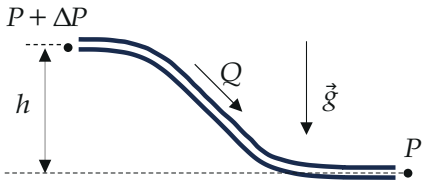
Часть 2. В данной части задачи требуется оценка погрешности только однократного измерения, проведение нескольких серий измерений не требуется.

2.1. Определите динамическую вязкость η «сухой воды» при комнатной температуре. Для определения η можно воспользоваться исследованием объёмного расхода Q жидкости при течении её через цилиндрический канал. Объёмный расход при ламинарном течении описывается

формулой Пуазейля (см. рис. 1):

$$Q = \frac{\pi D^4 (\Delta p + \rho g h)}{128\,\eta\, l},$$

где D — диаметр канала, Δp — разность давлений на концах канала, l — длина канала, Q — объёмный расход жидкости, измеряемый в м^3/с, h — разность высот начала и конца канала, ρ — плотность жидкости. Для получения результата снимите не менее 5 экспериментальных точек при разных объёмных расходах жидкости. Произведите графическую обработку измерений.



2.2. Переход от ламинарного течения к турбулентному определяется параметрами течения жидкости. Безразмерное число, характеризующее параметры движения, называется числом Рейнольдса и может быть рассчитано для течения жидкости через цилиндрический канал как:

$$\mathrm{Re} = \frac{Q\rho}{D\eta}.$$

В выбранном Вами методе измерений для максимальной скорости течения проверьте, что число Рейнольдса не превышает критическое значение $\mathrm{Re}_{кр} = 200$, то есть течение является ламинарным. Вычисления занесите в работу. При необходимости измените параметры установки и проведите эксперимент (пункты 2.1 и 2.2) заново.

Оборудование: «сухая вода» в бутылке, баночка с крышкой, штатив с лапкой и муфтой, секундомер, весы, шприц 1 мл, шприц 10 мл, линейка 30 см, силиконовая трубка малого сечения с штуцером (розовая игла), поднос, салфетки для поддержания чистоты на рабочем месте. Обратите

внимание, что в крышке банки есть отверстие, в которое может быть вставлен конец силиконовой трубки.

Часть 3. В данной части задачи требуется оценить как погрешность однократного измерения, так и случайную погрешность. Проведите не менее трёх измерений требуемой величины.

3. Определите молярную массу «сухой воды».

Оборудование: «сухая вода» в бутылке, баночка с крышкой, штатив с лапкой и муфтой, шприц 1 мл, шприц 50 мл, резиновая пробочка для носика шприца 50 мл, мерный цилиндр 250 мл, ведёрко для слива воды, горячая вода (по требованию), вода при комнатной температуре (по требованию), термометр электронный, весы электронные, поднос, салфетки для поддержания чистоты на рабочем месте.

Примечание. Резиновая пробочка предназначена для герметизации внутреннего объёма шприца, надевается на носик шприца. При небольшой разнице давлений она может быть проткнута иглой шприца 1 мл и после извлечения иглы сохранять герметичность.

Часть 4. В данной части задачи требуется оценка погрешности только однократного измерения, проведение многократных измерений не требуется.

Связь давления насыщенного пара с абсолютной температурой описывается уравнением Клапейрона–Клаузиуса. При предположениях о независимости удельной теплоты парообразования L от температуры и о малости плотности пара по сравнению с плотностью жидкости уравнение принимает вид:

$$\ln \frac{p_{н1}}{p_{н2}} = -\frac{L\mu}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right),$$

где $p_{н1}$ и $p_{н2}$ — давления насыщенного пара при температурах T_1 и T_2 соответственно, μ — молярная масса жидкости, R — универсальная газовая постоянная.

4. Вычислите значение L для «сухой воды». Для этого определите две точки зависимости давления насыщенного пара «сухой воды» от температуры. Выберите точки, позволяющие вычислить L с максимальной точностью.

Оборудование: «сухая вода» в бутылке, баночка с крышкой, штатив с лапкой и муфтой, шприц 1 мл, шприц 50 мл, резиновая пробочка для носика шприца 50 мл, мерный цилиндр 250 мл, ведёрко для слива воды, горячая вода (по требованию), вода при комнатной температуре (по требованию), термометр электронный, поднос, салфетки для поддержания чистоты на рабочем месте.

Часть 5. В данной части задачи требуется оценить как погрешность однократного измерения, так и случайную погрешность. Проведите не менее трёх измерений требуемой величины.

5. Определите показатель преломления n жидкости.

Оборудование: «сухая вода» в бутылке, баночка с крышкой, кювета пластиковая, линейка деревянная 50 см, линейка пластмассовая 30 см, лист бумаги А4, штатив с лапкой и муфтой, салфетки для поддержания чистоты на рабочем месте.

▲ **Решение. Что происходит.** Пять отдельных опытов с одной жидкостью — «сухой водой» (летучая прозрачная жидкость, тяжелее воды в 1,6 раза, кипит при 50 °C). Общий приём: величину, которую нельзя измерить прямо, переводим в то, что измерить можно, — массу на весах, объём и длину столба в шприце и трубке, температуру термометром. Плотность — из массы и объёма; коэффициент расширения — из смещения мениска в трубке, а расширение самого шприца исключаем сравнением с водой; вязкость — из вытекания по тонкой трубке (закон Пуазейля даёт экспоненту); молярную массу — полностью испарив порцию в шприце (уравнение Менделеева — Клапейрона); теплоту парообразования — по двум точкам кривой насыщенного пара; показатель преломления — по границе, за которой точку под кюветой не видно сбоку.

Обозначения и погрешности. Погрешность однократного измерения: относительные погрешности множителей складываем (верхняя оценка), $\sigma_f/f = \sum |\partial \ln f/\partial x_i|\,\sigma_{x_i}$; случайную погрешность находим из разброса повторных опытов. Комнатная температура в опыте части 4: $T_0 = (22{,}2 \pm 0{,}3)$ °C. Данные — результаты образца организаторов; у участника числа свои, обработка та же.

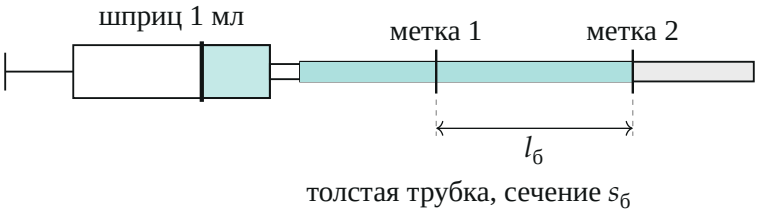
Часть 1.1. Плотность. Шприц 10 мл ставим на весы и обнуляем показания (тара не входит в массу). Наливаем в баночку «сухую воду», на-

бираем в шприц $V = (9{,}8 \pm 0{,}1)$ мл, взвешиваем: $m = (15{,}94 \pm 0{,}16)$ г. Шприц, а не мерный цилиндр на 250 мл, потому что цена деления цилиндра сравнима со всем объёмом, а в шприце объём читается до 0,1 мл. Плотность при комнатной температуре

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{15{,}94}{9{,}8} = 1{,}63 \text{ г/см}^3, \qquad \frac{\sigma_\rho}{\rho} = \frac{\sigma_m}{m} + \frac{\sigma_V}{V} = 0{,}020,$$

$\sigma_\rho = 0{,}03$ г/см^3.

Часть 1.2. Коэффициент объёмного расширения. Жидкость в шприце при нагреве расширяется, и излишек выходит в трубку, где его объём превращается в длину столба. Чем толще трубка, тем меньше смещение, поэтому берём толстую трубку: при $\Delta V \approx 0{,}3$ мл мениск уходит на несколько сантиметров. Но расширяется и сам шприц, и этот эффект сопоставим с расширением жидкости; его исключаем, сравнивая шприц с водой, у которой расширение известно. Поэтому опыт идёт в три шага.

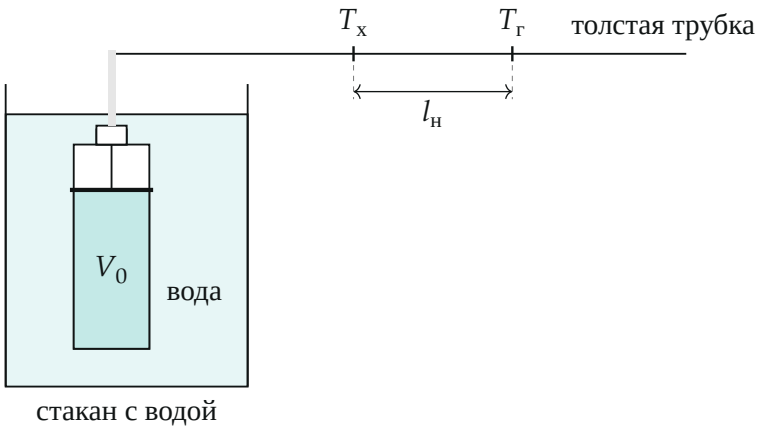


Шаг 1: калибровка сечения толстой трубки по воде из шприца 1 мл.

Шаг 1. Сечение трубки. Надеваем трубку на шприц 1 мл с водой, выдавливаем воду и отмечаем на трубке положение мениска в двух точках: метка 1 при объёме воды в шприце $v_{1б} = (0{,}96 \pm 0{,}01)$ мл и метка 2 при $v_{2б} = (0{,}12 \pm 0{,}01)$ мл. Между метками $l_б = (11{,}5 \pm 0{,}1)$ см трубки вмещают убывший объём воды:

$$s_б = \frac{v_{1б} - v_{2б}}{l_б} = \frac{0{,}84 \text{ см}^3}{11{,}5 \text{ см}} = 0{,}0730 \text{ см}^2 = (7{,}30 \pm 0{,}24) \text{ мм}^2.$$

Погрешность — по сумме относительных: $\dfrac{\sigma_s}{s} = \dfrac{2\sigma_v}{v_{1б} - v_{2б}} + \dfrac{\sigma_l}{l_б}$.



Шаги 2 и 3: шприц 10 мл с жидкостью в стакане, толстая трубка, мениск при холодной и тёплой воде.

Шаг 2. Расширение шприца. Шприц 10 мл заполняем водой ($V_0 = (10{,}5 \pm 0{,}2)$ мл), надеваем трубку и ждём, пока мениск остановится: сначала в холодной воде стакана ($T_х = (18{,}8 \pm 0{,}3)\,^\circ$C), затем в тёплой ($T_г = (31{,}8 \pm 0{,}3)\,^\circ$C). Мениск, в пределах точности, не сдвигается: объём шприца вырос так же, как объём воды, то есть коэффициент объёмного расширения сосуда равен коэффициенту расширения воды $\beta_в$. Его даёт плотность воды в интервале 20–40 °C ($\Delta\rho_в = 7{,}0$ кг/м^3 на 20 К, $\rho_в \approx 998$ кг/м^3):

$$\beta_в = \frac{\Delta\rho_в}{\rho_в\,\Delta T} = \frac{7{,}0}{998 \cdot 20} = 0{,}35 \cdot 10^{-3}\ ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Обратите внимание: без этой калибровки ответ занижен на 17% (1,68 вместо 2,03 в единицах 10^{-3}), потому что сосуд «прячет» часть расширения; прямое сравнение с водой — единственное, что не требует знать материал шприца.

Шаг 3. Жидкость. Шприц заполняем «сухой водой» тем же объёмом V_0 и нагреваем от $T_{сн} = (16{,}8 \pm 0{,}3)\,^\circ$C до $T_{нн} = (35{,}0 \pm 0{,}3)\,^\circ$C (то есть на $\Delta T = 18{,}2$ К). Мениск уходит от носика на $l_н = (4{,}4 \pm 0{,}1)$ см.

Вытесненный объём равен разности расширений жидкости и сосуда:

$$l_{\text{н}} s_{\text{б}} = (\beta - \beta_{\text{в}})\, V_0\, \Delta T \quad \Longrightarrow \quad \beta = \beta_{\text{в}} + \frac{l_{\text{н}} s_{\text{б}}}{V_0\, \Delta T},$$

$$\beta = 0{,}35 \cdot 10^{-3} + \frac{4{,}4 \cdot 0{,}0730}{10{,}5 \cdot 18{,}2} = 2{,}0 \cdot 10^{-3}\ {}^{\circ}\text{C}^{-1}.$$

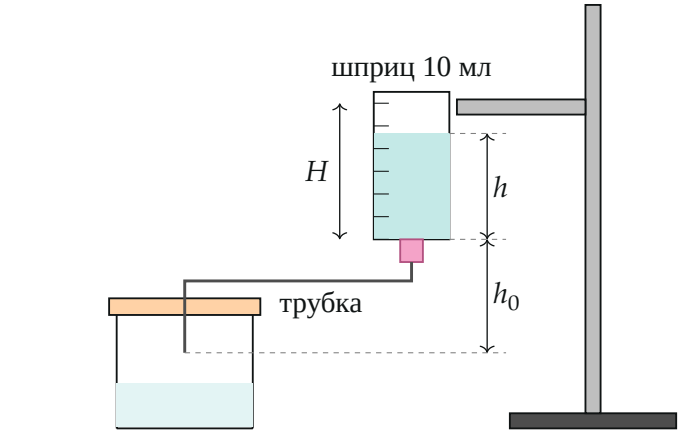
Погрешность:

$$\sigma_\beta = (\beta - \beta_{\text{в}})\Big(\frac{\sigma_{V_0}}{V_0} + \frac{\sigma_l}{l_{\text{н}}} + \frac{2\sigma_T}{\Delta T} + \frac{\sigma_s}{s_{\text{б}}}\Big),$$

$$\sigma_\beta = 1{,}68 \cdot 10^{-3} \cdot (0{,}019 + 0{,}023 + 0{,}033 + 0{,}033) \approx 0{,}2 \cdot 10^{-3}.$$

Официальное решение не учитывает σ_s и даёт $0{,}1 \cdot 10^{-3}$; значение $\beta = (2{,}0 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-3}\ {}^{\circ}\text{C}^{-1}$ совпадает с табличным $1{,}84 \cdot 10^{-3}$. Физический смысл: жидкость расширяется почти в шесть раз сильнее воды $(2{,}0/0{,}35)$ — характерно для жидкостей со слабым межмолекулярным взаимодействием.

Часть 2.1. Вязкость. Что происходит: жидкость вытекает из шприца по тонкой трубке под давлением собственного столба. Пока она вытекает, столб убывает, давление падает, расход падает: скорость убывания пропорциональна самому столбу, значит, зависимость экспоненциальная. Главная идея — линеаризовать экспоненту логарифмом и найти η по наклону прямой.



Установка: шприц 10 мл на штативе, розовая игла, силиконовая трубка в банке с крышкой.

Закон течения. Через сечение $s = \pi D^2/4$, то есть $D^4 = 16s^2/\pi^2$, формула Пуазейля из условия принимает вид

$$Q = \frac{\pi D^4(\Delta p + \rho g h)}{128\,\eta\, l} = \frac{s^2\,\Delta P}{8\pi\eta l}, \qquad \Delta P = \Delta p + \rho g h.$$

Поршень вынут, и конец трубки в банке сообщается с атмосферой через отверстие в крышке, поэтому $\Delta p = 0$ (крышка не герметична): жидкость течёт только под действием собственного веса. Разность высот между поверхностью жидкости в шприце и концом трубки — $y = h + h_0$: h_0 между началом шкалы и концом трубки постоянна, а $h = V\,H/V_{10}$ убывает вместе с объёмом (шприц — цилиндр, высота пропорциональна объёму; $H = (5{,}7 \pm 0{,}1)$ см — высота шкалы на $V_{10} = (10{,}0 \pm 0{,}2)$ мл, $h_0 = (1{,}2 \pm 0{,}2)$ см). Расход $Q = -dV/dt$:

$$-\frac{dV}{dt} = \frac{s^2\rho g\, y}{8\pi\eta l}, \qquad y = V\frac{H}{V_{10}} + h_0.$$

Умножаем на H/V_{10}: слева получается dy/dt, потому что h_0 постоянна,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{H}{V_{10}}\frac{dV}{dt} = -k\,y, \qquad k = \frac{H\,s^2\rho g}{8\pi\eta\,l\,V_{10}}.$$

Получилось простейшее дифференциальное уравнение первого порядка для самой величины y (постоянная h_0 ушла в определение y), его решение

$$y = y_0 e^{-kt}, \qquad \ln y = \ln y_0 - kt.$$

Закон верен, пока в шприце есть жидкость ($V > 0$, то есть $y > h_0$): до момента $t_{\text{кон}} = \dfrac{1}{k}\ln\dfrac{y_0}{h_0} \approx 264$ с.

Измерения. Сечение тонкой трубки с розовой иглой: метки при $v_1 = (0{,}98 \pm 0{,}01)$ мл и $v_2 = (0{,}50 \pm 0{,}01)$ мл, расстояние между метками $l' = (59{,}3 \pm 0{,}2)$ см, откуда

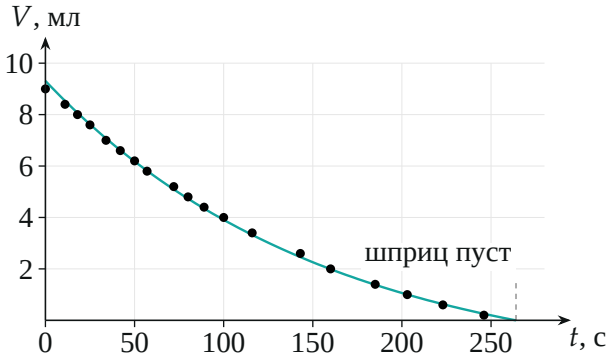
$$s = \frac{v_1 - v_2}{l'} = \frac{0{,}48\ \text{см}^3}{59{,}3\ \text{см}} = 0{,}0081\ \text{см}^2 = (0{,}81 \pm 0{,}04)\ \text{мм}^2,$$

то есть диаметр канала $D = \sqrt{4s/\pi} = 1{,}0$ мм. Обратите внимание: в официальном решении расстояние записано в миллиметрах («59,3 мм»), но с таким числом получилось бы 8,1 мм^2; величина 0,81 мм^2, на которой держится весь ответ, соответствует 59,3 **см**: это почти вся длина трубки, как и положено при протолкнутой почти до конца воде. Дальше снимаем $V(t)$ секундомером (погрешность $\sigma_t = 1$ с), считаем $y = VH/V_{10} + h_0$ и $\ln y$ (погрешность логарифма равна относительной по-

грешности y):

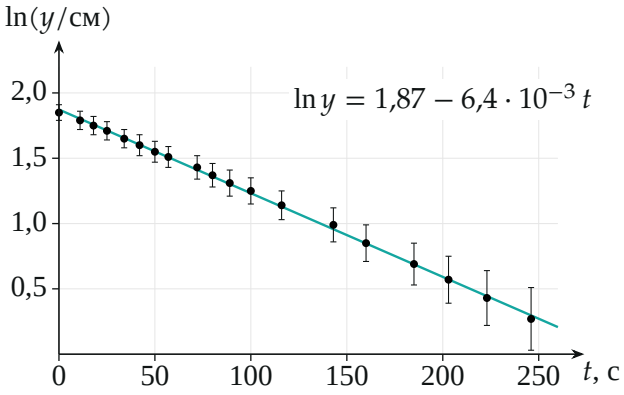
t, с	V, мл	y, см	$\ln y$	t, с	V, мл	y, см	$\ln y$
0	9,0	6,3	1,85	89	4,4	3,7	1,31
11	8,4	6,0	1,79	100	4,0	3,5	1,25
18	8,0	5,8	1,75	116	3,4	3,1	1,14
25	7,6	5,5	1,71	143	2,6	2,7	0,99
34	7,0	5,2	1,65	160	2,0	2,3	0,85
42	6,6	5,0	1,60	185	1,4	2,0	0,69
50	6,2	4,7	1,55	203	1,0	1,8	0,57
57	5,8	4,5	1,51	223	0,6	1,5	0,43
72	5,2	4,2	1,43	246	0,2	1,3	0,27
80	4,8	3,9	1,37				

Качественная картина видна уже на графике $V(t)$: объём убывает всё медленнее, потому что убывает давление.



Объём в шприце: точки — опыт, кривая — $V = (y_0 e^{-kt} - h_0)V_{10}/H$ при найденном k.

Строим $\ln y$ от t и проводим прямую методом наименьших квадратов (формулы — как в обработке любой линейной зависимости): наклон $-k$ и сдвиг $\ln y_0$.



Линеаризация: точки с погрешностями $\sigma_{\ln y}$, прямая — МНК.

Точки ложатся на прямую в пределах погрешностей, то есть течение действительно подчиняется закону Пуазейля. Получаем $k = (6{,}41 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$ по МНК без весов (с весами $1/\sigma^2$ — $6{,}27 \cdot 10^{-3}$); с запасом на выбор весов и чтение шкалы $k = (6{,}4 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$, время релаксации $1/k \approx 156$ с. Полная длина трубки $l = (63{,}5 \pm 1{,}0)$ см: погрешность 1 см, потому что игла сравнима с трубкой по длине, и её сопротивление неизвестно. Динамическая вязкость

$$\eta = \frac{H s^2 \rho g}{8\pi V_{10} k l} = \frac{5{,}97 \cdot 10^{-10}}{1{,}02 \cdot 10^{-6}} = 5{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{Па} \cdot \text{с}$$

(числитель: $0{,}057 \cdot (0{,}81 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 1630 \cdot 9{,}8$ в единицах СИ; знаменатель: $8\pi \cdot 10^{-5} \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}635$). Погрешность:

$$\frac{\sigma_\eta}{\eta} = \frac{\sigma_H}{H} + \frac{2\sigma_s}{s} + \frac{\sigma_\rho}{\rho} + \frac{\sigma_k}{k} + \frac{\sigma_l}{l} + \frac{\sigma_{V_{10}}}{V_{10}},$$

$$\frac{\sigma_\eta}{\eta} = 0{,}018 + 0{,}099 + 0{,}018 + 0{,}031 + 0{,}016 + 0{,}020 = 0{,}20,$$

$\sigma_\eta = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ Па·с. Главный вклад — сечение трубки (точность 5%, и оно входит в квадрате). Табличное значение: $\eta_{\text{табл}} = \nu\rho = 0{,}39 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}6 \cdot 10^3 = 6{,}2 \cdot 10^{-4}$ Па·с (25 °C) — в пределах погрешности.

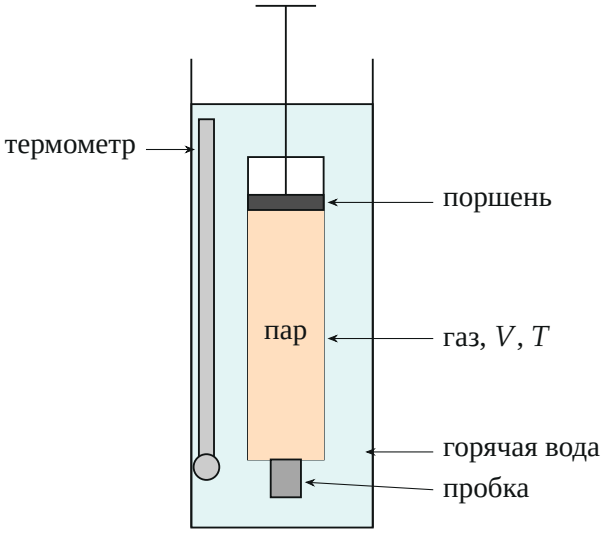
Часть 2.2. Число Рейнольдса. Расход пропорционален y, поэто-

му наибольший он в начале опыта. Для первого интервала: $Q_{\max} = \dfrac{(9{,}0 - 8{,}4)\text{ мл}}{11\text{ с}} = 5{,}5 \cdot 10^{-8}\text{ м}^3/\text{с}$,

$$\mathrm{Re}_{\max} = \frac{Q_{\max}\rho}{D\eta} = \frac{5{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot 1630}{1{,}02 \cdot 10^{-3} \cdot 5{,}8 \cdot 10^{-4}} \approx 150 < \mathrm{Re}_{\text{кр}} = 200.$$

Течение на всём протяжении опыта ламинарное, формула Пуазейля применима. (В официальной записи то же самое: в знаменателе $11 \cdot 5{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3}$ стоят время 11 с, вязкость и диаметр 1 мм.) При заданном давлении $\mathrm{Re} \propto D^3$, поэтому у более толстой трубки течение быстро стало бы турбулентным и формула Пуазейля перестала бы работать — для этого проверка и нужна.

Часть 3. Молярная масса. Что происходит: чтобы найти число молей, превращаем порцию жидкости в газ при известных давлении и температуре. Шприц с подвижным поршнем работает как сосуд, давление в котором равно атмосферному (плюс трение поршня); пар не должен быть насыщенным, то есть жидкость должна испариться целиком.



Шприц 60 мл с пробкой, поршень на нуле, в горячей воде в мерном цилиндре.

Поправка на трение поршня. Набираем в шприц $V_{\text{нач}} = 60$ мл воздуха, закрываем носик, нажимаем на поршень и отпускаем: поршень возвращается и останавливается на $V_{\text{кон}} = 59$ мл. Избыточное давление в этот момент удерживается трением, поэтому в сторону увеличения объёма давление газа в шприце

$$p_0' = p_0 \frac{V_{\text{нач}}}{V_{\text{кон}}} = 100 \cdot \frac{60}{59} \approx p_0 + \Delta p_0 = (102 \pm 2)\ \text{кПа}.$$

Так будет и когда пар выталкивает поршень наружу: останавливается он при давлении газа p_0'.

Опыт. Поршень на нуле, на носик надета пробка; кладём шприц на весы, обнуляем, вводим иглой шприца 1 мл 0,2–0,3 мл «сухой воды» и снова взвешиваем: $m = (0{,}57 \pm 0{,}02)$ г (в большом шприце — только жидкость, воздуха нет). Опускаем шприц в мерный цилиндр с горячей водой ($T > T_{\text{кип}}$): жидкость кипит, поршень уходит наружу и останавливается, когда пар и вода в цилиндре в тепловом равновесии. Читаем $V = (50{,}0 \pm 0{,}5)$ мл и $T = (69{,}5 \pm 0{,}3)\ ^\circ\text{C} = (342{,}7 \pm 0{,}3)$ К. Уравнение Менделеева — Клапейрона для пара:

$$p_0' V = \frac{m}{\mu} RT \quad \Longrightarrow \quad \mu = \frac{mRT}{p_0' V},$$

$$\mu = \frac{0{,}57 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 342{,}7}{1{,}02 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 318\ \text{г/моль}.$$

Систематическая погрешность:

$$\frac{\sigma_\mu}{\mu} = \frac{\sigma_m}{m} + \frac{\sigma_{p_0'}}{p_0'} + \frac{\sigma_V}{V} + \frac{\sigma_T}{T} = 0{,}035 + 0{,}020 + 0{,}010 + 0{,}001 = 0{,}065,$$

то есть $\sigma_\mu^{\text{сист}} = 21$ г/моль.

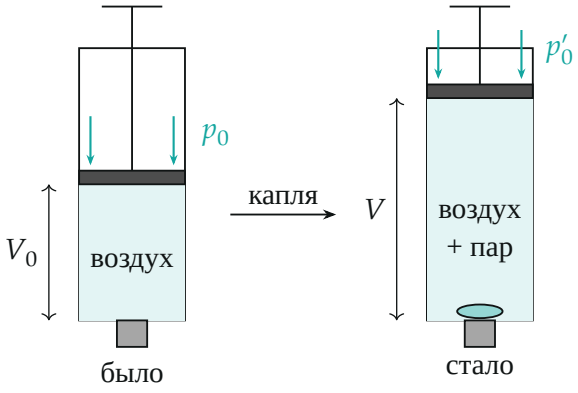
Повторные опыты. Для случайной погрешности делаем ещё два опы-

та с другими порциями. Пересчёт:

m, г	V, мл	T, °C	T, K	μ, г/моль
0,57	50,0	69,5	342,6	318
0,51	41,5	64,4	337,5	338
0,36	29,0	57,5	330,6	335

Среднее $\bar{\mu} = 330$ г/моль, разброс по трём опытам $\sigma_{\text{случ}} = 11$ г/моль. Итог $\mu = (330 \pm 30)$ г/моль (систематическая и случайная погрешности складываются). Табличное значение — 316 г/моль. (У организаторов в таблице 319, 338, 334: расхождение в единицу — округление давления $p'_0 = 101{,}7 \approx 102$ кПа и температур.)

Часть 4. Теплота парообразования. Что происходит: связь давления насыщенного пара с температурой дана в условии, поэтому достаточно двух её точек. Одна точка — кипение: $p_{\text{н}} = p_0$ при $T_{\text{кип}}$, давление известно, температура измеряется термометром. Вторая — комнатная температура, давление насыщенного пара находим по шприцу.



Шприц с воздухом до и после введения капли «сухой воды»: объём вырос с V_0 до V, воздух разбавлен насыщенным паром.

Закон Дальтона и Бойля. Под поршнем должны быть воздух и насыщенный пар одновременно: давление пара ниже атмосферного, и один пар поршень бы просто втянул. Тогда после установления равновесия давление смеси равно p'_0 (поршень стоит, давление включает трение),

сумма давлений воздуха и пара: $p'_0 = p_в + p_н$. Воздух сначала занимает V_0 при p_0 и T_0, потом — объём V при той же температуре (поршень останавливается после выравнивания температуры), по закону Бойля — Мариотта $p_в = p_0 V_0 / V$. Отсюда

$$p_н = p'_0 - p_0 \frac{V_0}{V} = p_0\left(1 - \frac{V_0}{V}\right) + \Delta p_0 = 100 \cdot \left(1 - \frac{30{,}0}{49{,}0}\right) + 2 = 40{,}8 \text{ кПа},$$

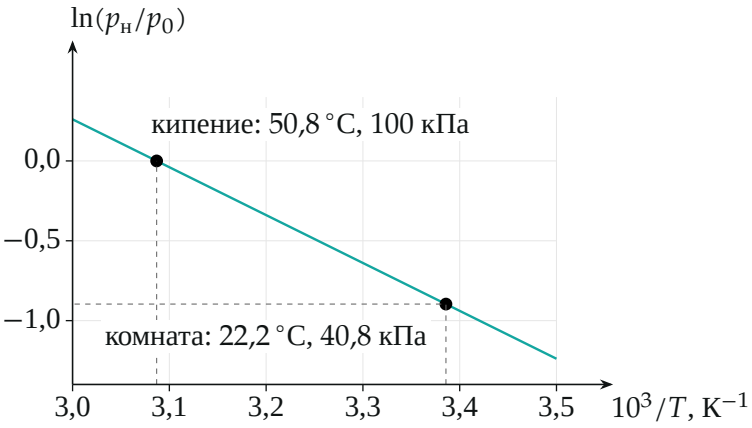
при $V_0 = (30{,}0 \pm 0{,}5)$ мл воздуха, введённых $\approx 0{,}3$ мл жидкости (достаточно, чтобы часть жидкости осталась и пар был насыщенным), $V = (49{,}0 \pm 0{,}5)$ мл после 5–10 минут ожидания, $T_0 = (22{,}2 \pm 0{,}3)\,^\circ\text{C} = (295{,}4 \pm 0{,}3)$ K. Погрешность давления

$$\sigma_{p_н} = (p_н - \Delta p_0)\left(\frac{\sigma_{p_0}}{p_0} + \frac{V_0}{V - V_0}\left(\frac{\sigma_{V_0}}{V_0} + \frac{\sigma_V}{V}\right)\right) = 2{,}4 \text{ кПа},$$

то есть $p_н = (40{,}8 \pm 2{,}4)$ кПа.

Вторая точка. Выбор определяется точностью и расстоянием по температуре от первой: чем дальше, тем меньше относительная погрешность $1/T_1 - 1/T_2$. Температура кипения удовлетворяет обоим требованиям: давление известно (p_0), температуру измеряем термометром в самой жидкости (а не в шприце, где термометр поставить нельзя), и она ближайшая к комнатной из тех, что можно получить с этим оборудованием (выше точки кипения пар в шприце измерять нечем). Наливаем немного жидкости в баночку и пускаем её плавать в горячей воде; кипение при $T_{кип} = (50{,}8 \pm 0{,}3)\,^\circ\text{C} = (323{,}95 \pm 0{,}3)$ K. Обратите внимание: в официальном решении $T_{кип}$ записана как 332,0 K, но $50{,}8 + 273{,}15 = 323{,}95$ K; именно с 324 K получается напечатанный ответ 76 Дж/г (с 332 K вышло бы 60).

Теплота парообразования. Формула Клапейрона — Клаузиуса для точек (1) — комната, (2) — кипение: $\ln \dfrac{p_н}{p_0} = -\dfrac{L\mu}{R}\left(\dfrac{1}{T_0} - \dfrac{1}{T_{кип}}\right)$, то есть в координатах $(1/T,\ \ln p)$ это прямая с наклоном $-L\mu/R$; две точки её определяют.



Две точки кривой насыщенного пара в координатах $(1/T, \ln p)$; наклон прямой равен $-L\mu/R$.

$$L = \frac{R}{\mu}\,\frac{T_0 T_{\text{кип}}}{T_{\text{кип}} - T_0}\,\ln\frac{p_0}{p_{\text{н}}} = \frac{8{,}31}{0{,}330}\cdot\frac{295{,}4\cdot 323{,}95}{28{,}6}\cdot\ln\frac{100}{40{,}8}$$

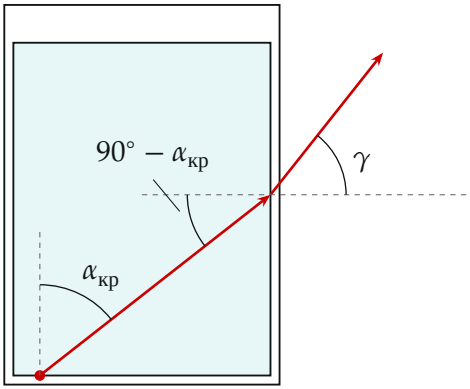
$$L = 25{,}2\cdot 3346\cdot 0{,}896 \approx 7{,}6\cdot 10^4 \text{ Дж/кг} = 76 \text{ Дж/г}.$$

Погрешность:

$$\frac{\sigma_L}{L} = \frac{2\sigma_T}{T_{\text{кип}} - T_0} + \frac{\sigma_\mu}{\mu} + \frac{\sigma_{\ln}}{\ln(p_0/p_{\text{н}})} = 0{,}021 + 0{,}064 + 0{,}088 = 0{,}17,$$

где в σ_μ взята систематическая часть 21 г/моль; $\sigma_L = 13$ Дж/г. Табличное $L = 88$ Дж/г (при $T_{\text{кип}} = 49{,}2\,^\circ$C) попадает в интервал 76 ± 13.

Часть 5. Показатель преломления. Что происходит: точку на бумаге под дном кюветы видно сбоку не со всех направлений. Граница видимости зависит только от n, и угол этой границы измеряется линейками. Свет от точки входит в жидкость через дно под любым углом, но внутри жидкости углы с вертикалью α не больше предельного $\alpha_{\text{кр}} = \arcsin(1/n)$: за пределы этого конуса лучи не попадают, потому что снаружи угол падения не больше 90° и $\sin 90^\circ = n\sin\alpha_{\text{кр}}$.



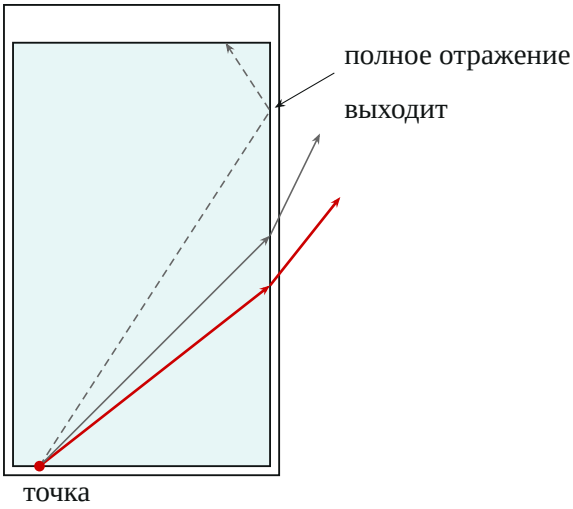
Крайний луч конуса ($n = 1{,}27$, углы вычислены): $\alpha_{кр} = 51{,}9°$, $\gamma = 51{,}5°$.

Луч с $\alpha = \alpha_{кр}$ падает на боковую стенку под углом $90° - \alpha_{кр}$ к нормали (она горизонтальна), и закон преломления для границы жидкость — воздух даёт угол выхода γ:

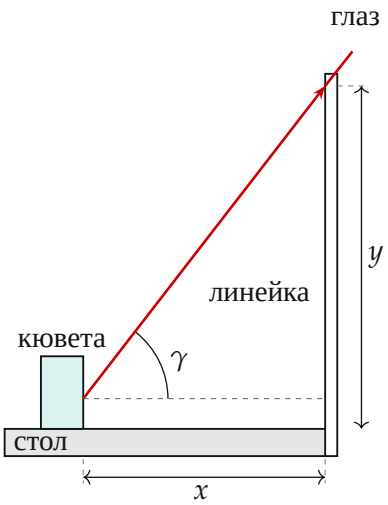
$$\sin\gamma = n\sin(90° - \alpha_{кр}) = n\cos\alpha_{кр} = n\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \sqrt{n^2 - 1},$$

$$n = \sqrt{1 + \sin^2\gamma}.$$

Чем круче луч, тем больше угол выхода: все остальные лучи конуса выходят выше (серые на следующем рисунке), а лучи с $\alpha < \arcsin\sqrt{1 - 1/n^2}$ (для $n = 1{,}27$ это $\alpha < 38°$) полностью отражаются от стенки. Поэтому точка видна, только если взгляд направлен выше горизонтали на угол не меньше γ.



Конус лучей: красный — крайний, серый — вышедший выше границы, штрих — полное отражение на стенке.



Измерение γ: линейка по горизонтали (расстояние x от кюветы до края стола) и вертикальная линейка у края стола (высота y).

Измерение. Одну линейку кладём на стол, другую ставим вертикально у края стола. Смотрим сбоку и ищем положение глаза, при котором

точка начинает исчезать; верх вертикальной линейки подводим к линии взгляда. Тогда $\tan\gamma = y/x$ (линия взгляда идёт от кюветы к глазу). Измерено $x = (36{,}1 \pm 0{,}2)$ см, $y = (45{,}5 \pm 1{,}0)$ см (погрешность y — 1 см из-за субъективности наблюдателя и неопределённости точки выхода лучей). Угол

$$\gamma = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{45{,}5}{36{,}1} = 51{,}6^\circ.$$

Систематическая погрешность методом границ:

$$\Delta\gamma = \frac{1}{2}\Big[\arctan\frac{y+\sigma_y}{x-\sigma_x} - \arctan\frac{y-\sigma_y}{x+\sigma_x}\Big] = 0{,}8^\circ;$$

случайная, по нескольким опытам при разных x, $\approx 2^\circ$; итог $\gamma = (51{,}6 \pm 3{,}0)^\circ$. Показатель преломления

$$n = \sqrt{1+\sin^2 51{,}6^\circ} = \sqrt{1+0{,}614} = 1{,}27,$$

$$\sigma_n = \frac{\sin\gamma\cos\gamma}{n}\,\sigma_\gamma = 0{,}38 \cdot 0{,}052 = 0{,}02.$$

Табличное значение $n = 1{,}264$. Стенки кюветы на деле не вертикальны, но подробный расчёт показывает, что существенной ошибки это не даёт.

Проверка. Пределы формулы $n = \sqrt{1+\sin^2\gamma}$: при $\gamma \to 0$ получаем $n \to 1$ (контраста нет, видимость до горизонтали); при $\gamma = 90^\circ$ получаем $n = \sqrt{2}$: при $n \geqslant \sqrt{2}$ точка сбоку не видна ни под каким углом (лучи полностью отражаются), а наша жидкость с $n = 1{,}27 < \sqrt{2}$ — видна. Размерность: Re безразмерно, $\frac{R}{\mu}T$ даёт Дж/кг. Сопоставление с таблицей: $\rho, \beta, \eta, \mu, L, n$ укладываются в интервалы погрешностей (316 г/моль, $1{,}84\cdot10^{-3}$, $6{,}2\cdot10^{-4}$ Па·с, 88 Дж/г, 1,264). Согласованность опытов: молярная теплота $L\mu \approx 25$ кДж/моль, как у обычной кипящей жидкости (правило Трутона: $\approx 10\,RT_{\text{кип}}$).

Ответ. 1.1) $\rho = (1{,}63 \pm 0{,}03)$ г/см^3; 1.2) $\beta = (2{,}0 \pm 0{,}2)\cdot10^{-3}$ °C^{-1}; 2.1) $\eta = (5{,}8 \pm 1{,}2)\cdot10^{-4}$ Па·с; 2.2) $\mathrm{Re}_{\max} = 150 < 200$ (течение ламинарное); 3) $\mu = (330 \pm 30)$ г/моль; 4) $L = (76 \pm 13)$ Дж/г; 5) $n = (1{,}27 \pm 0{,}02)$.