# Весы Роберваля

**Задача 1.** [ВсОШ 2023/24, 9 класс, задача 1] «Весы Роберваля». Основой конструкции весов Роберваля является параллелограмм (рамка), состоящий из четырёх жёстких деревянных стержней (см. рис. 1).

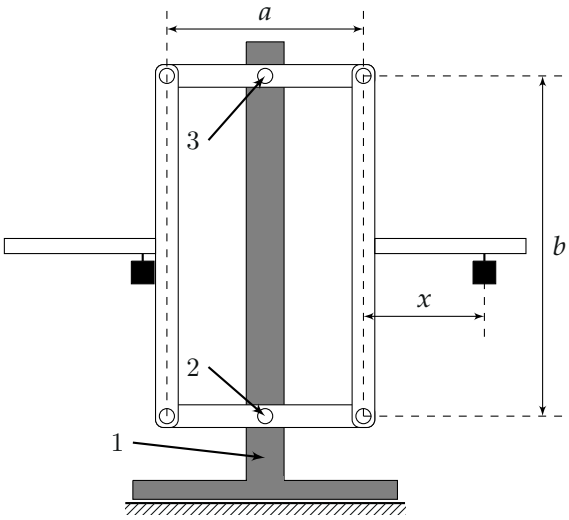



Рис. 1

Обозначения на рисунке: 1 — основание весов; 2 — нижний центральный шарнир, жёстко соединённый с рамкой весов; 3 — верхний центральный шарнир, жёстко соединённый с основанием весов.

Середины двух противоположных (исходно горизонтальных) сторон параллелограмма шарнирно закреплены на вертикальном основании. При этом две другие его стороны в любой конфигурации параллелограмма остаются вертикальными. Перпендикулярно к этим сторонам жёстко прикреплены «полки» весов, на которых располагаются взвешиваемые грузы (см. рисунок). Удивительным свойством этой механической системы является то, что, если массы грузов одинаковы, весы находятся в равновесии независимо от места расположения грузов. Возникает ощущение, что не выполняется правило моментов. Особенностью конструкции весов, используемых в данной работе, является

большой размер нижнего отверстия в основании, обеспечивающий свободное перемещение в этом отверстии (наличие определённого люфта) нижнего центрального шарнира.

1. Запишите номер весов, указанный на нижней части основания. Установите весы на крае стола и закрепите их двумя зажимами. Измерьте в миллиметрах длины сторон параллелограмма $a$ и $b$ между центрами угловых шарниров. Сбалансируйте весы. Для этого, устраняя трение в шарнирах лёгким постукиванием по нижней части основания, добейтесь устойчивости горизонтального положения верхней рейки параллелограмма, надевая дополнительные шайбы с диаметром отверстия 6 мм на шурупы верхних торцов вертикальных реек.
2. Только в рамках пунктов 1–3 задания считайте, что все силы трения скольжения данной конструкции сосредоточены в верхнем центральном шарнире радиусом $R$ и создают в нём эффективный суммарный момент $M = F_{\text{тр}}R$ (в других пунктах указанную модель не используйте). Определите момент силы трения $M_1$ сбалансированных весов без нагрузки (до установки на них тяжёлых грузов). Масса большой дополнительной шайбы (с диаметром отверстия 8 мм) $m_6 = 6$ г, масса малой дополнительной шайбы (с диаметром отверстия 5 мм) $m_{\text{м}} = 1$ г. Подробно опишите метод определения $M_1$.
3. Установите тяжёлые грузы на левую и правую полки весов максимально близко к вертикальным рейкам параллелограмма. (Внимание: инструкция по установке и снятию грузов приведена в приложении к условию). Убедитесь в устойчивости горизонтального положения верхней рейки параллелограмма. Аналогично пункту 2 задания определите эффективный суммарный момент силы трения $M_2$ для нагруженных весов. Чему равно отношение $n = M_2/M_1$?

При выполнении пунктов 1–3 задания построение графиков не требуется.

4. Снимите зависимость горизонтальной силы $F$, действующей со

стороны основания на нижний центральный шарнир, от расстояния $x$, на которое правый груз удалён от оси вертикальной рейки параллелограмма (см. рис. 1). Примечание: левый груз при этом должен располагаться на прежнем месте, т. е. максимально близко к своей вертикальной рейке. Измерения проводите при горизонтальном положении верхней и нижней реек параллелограмма. В таблице измерений предусмотрите дополнительный столбец для дальнейших исследований.

5. Постройте график полученной зависимости.
6. Выведите формулу, связывающую $F$ и $x$ через массу грузов и геометрические размеры установки (см. рис. 1).
7. Используя результаты, полученные в пунктах 4–6 задания, определите массу тяжёлых грузов $m_0$. Оцените погрешность определения массы.
8. Проведя необходимое дополнительное измерение и используя результаты, полученные в пункте 4 задания, рассчитайте зависимость силы $Q$, действующей со стороны верхнего центрального шарнира на рамку весов, от расстояния $x$, на которое правый груз удалён от оси вертикальной рейки параллелограмма. Запишите формулу, использованную для расчёта $Q(x)$.
9. Постройте график зависимости $Q(x)$. При выполнении пунктов 8 и 9 задания погрешность не рассчитывайте.

Оборудование: весы Роберваля, два больших груза одинаковой массы, два зажима, динамометр с пределом измерений 5 Н, линейка 40 см, дополнительные шайбы трёх типов по 5 шт (с диаметрами отверстий 5 мм, 6 мм и 8 мм). Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$.

**Приложение. Инструкция по установке больших грузов.**

1. Любые измерения с тяжёлыми грузами должны производиться только при надёжном креплении грузов, подвешенных к полкам весов с помощью винта, торчащего из крышки, и гайки М3, как показано на рисунке 2. В исходном состоянии на винт каждого груза (каждой бутылки с песком) навинчено по 3 гайки. Одна из них является основной, две другие — запасные. Каждую из них можно использовать при утере предыдущей. Дополнительные гайки М3, кроме имеющихся в Вашем

распоряжении в начале эксперимента, выдаваться не будут.

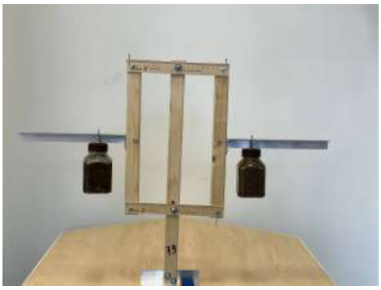


2. Левый груз устанавливается первым. Он при всех измерениях в данном задании располагается максимально близко к левой рейке параллелограмма. Его местоположение не изменяется. Удерживайте груз одной рукой ниже полки весов и, вставив винт в отверстие, другой рукой навинтите гайку таким образом, чтобы несколько витков резьбы винта оказалось выше гайки. Это обеспечит надёжность крепления. Имейте в виду, что падение груза на стол или на пол может привести к образованию трещин в бутылочке и высыпанию песка из неё.

3. Закрепив левый груз, плавно опустите его рукой вместе с полкой весов вниз до упора (см. рисунок 3).



4. Аналогично установите правый груз в нужном месте правой полки. Плавно отпустите его и вручную переведите верхнюю и нижнюю рейки параллелограмма в горизонтальное положение (см. рисунок 4).



5. Перед снятием правого груза снова плавно переведите левый груз в нижнее положение. После этого изменяйте положение правого груза и вновь придавайте параллелограмму форму прямоугольника.

▲ **Решение. Что происходит.** Весы Роберваля — параллелограмм: вертикальные рейки всегда остаются вертикальными и перемещаются поступательно, поэтому, когда весы качаются, оба груза опускаются и поднимаются на одно и то же расстояние, где бы на полке они ни стояли. Отсюда «парадокс»: момент груза на полке воспринимает не верхний шарнир, а пара горизонтальных сил в шарнирах рейки, и в конце концов — горизонтальная сила в нижнем центральном шарнире. Её мы и измеряем динамометром. Работа состоит из трёх частей: момент трения (метод виртуальных перемещений), линейная зависимость $F(x)$ (правило моментов, масса груза из наклона прямой) и сила $Q$ в верхнем шарнире (векторное сложение). Ниже — обработка данных контрольной установки организаторов.

**Обозначения.** $a$, $b$ — ширина и высота параллелограмма; $\Delta m$ — масса шайб, при которой весы трогаются; $x$ — расстояние от правого груза до оси правой рейки, $x_л$ — то же для левого груза; $M$ — масса рамки; $F_в$ и $F$ — вертикальная и горизонтальная составляющие силы $\vec{Q}$.

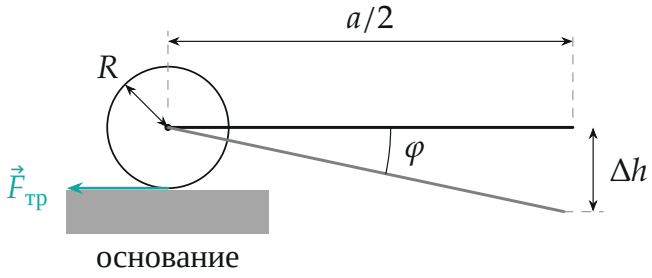
**Пункт 1.** На контрольной установке $a = 184$ мм, $b = 300$ мм. Весы балансируют шайбами на верхних торцах реек, постукивая по основанию, чтобы трение не маскировало перекос.

**Пункт 2.**

**1. Метод.** На одну полку по одной кладём малые шайбы (1 г), пока весы не начнут медленно опускаться; полная масса шайб в этот момент — $\Delta m$. Опускание медленное, кинетической энергией пренебрегаем: работа силы тяжести шайб на малом перемещении равна работе против трения (метод виртуальных перемещений). Рейка опускается на $\Delta h$, верхняя перекладина — рычаг длиной $a/2$ — поворачивается на малый угол $\varphi = \Delta h/(a/2)$; вместе с ней поворачивается цилиндр шарнира радиуса $R$ и проскальзывает по основанию на дугу $\Delta L = R\varphi$:

$$\Delta m\, g\, \Delta h = F_{\text{тр}} \Delta L \quad \Rightarrow \quad \Delta m\, g\, \frac{a}{2}\,\varphi = F_{\text{тр}} R\,\varphi \quad \Rightarrow \quad M = F_{\text{тр}} R = \Delta m\, g\, \frac{a}{2}.$$

Место шайб на полке не важно: полка движется поступательно.




*Виртуальное перемещение: рычаг $a/2$ поворачивается на угол $\varphi$, конец опускается на $\Delta h$, цилиндр шарнира проскальзывает на дугу $R\varphi$.*

**2. Результат.** Весы немного несимметричны, поэтому меряем с обеих сторон и усредняем. Справа $\Delta m_{\text{п}} = 4$ г, слева $\Delta m_{\text{л}} = 3$ г:

$$M_1 = \frac{\Delta m_{\text{п}} + \Delta m_{\text{л}}}{2}\, g\, \frac{a}{2} = 3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 0{,}092 \approx 3{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{Н} \cdot \text{м}.$$

**Пункт 3.** С большими грузами у реек: справа $\Delta m_{\text{п}} = 17$ г, слева $\Delta m_{\text{л}} = 15$ г, среднее 16 г:

$$M_2 = 16 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 0{,}092 \approx 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{Н} \cdot \text{м}, \qquad n = \frac{M_2}{M_1} = \frac{16}{3{,}5} \approx 4{,}6.$$

Трение выросло в несколько раз: сила трения пропорциональна силе давления на шарнир, а она с грузами увеличилась (рамка $\approx$ 0,3 кг, с грузами $\approx$ 1,4 кг). У организаторов $M_2 = 15{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н·м и $n \approx 4{,}7$: точное среднее их же чисел $14{,}7 \cdot 10^{-3}$ Н·м, а $n$ в пределах точности то же.

**Пункт 4.** Динамометр цепляем за петлю внизу правой рейки и тянем горизонтально; показание снимаем, когда нижний шарнир висит в отверстии, не касаясь стенок, — тогда сила динамометра заменяет силу стенки. Отверстия на полке: ближайшее в 52 мм от оси рейки, шаг 20 мм, $x_i = (52 + 20i)$ мм.

| $x$, мм | 72 | 92 | 112 | 132 | 152 | 172 | 192 | 212 | 232 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$, Н | 0,2 | 0,6 | 1,0 | 1,3 | 1,8 | 2,1 | 2,5 | 2,9 | 3,2 |
| $Q$, Н | 14,15 | 14,16 | 14,19 | 14,21 | 14,26 | 14,30 | 14,37 | 14,44 | 14,51 |

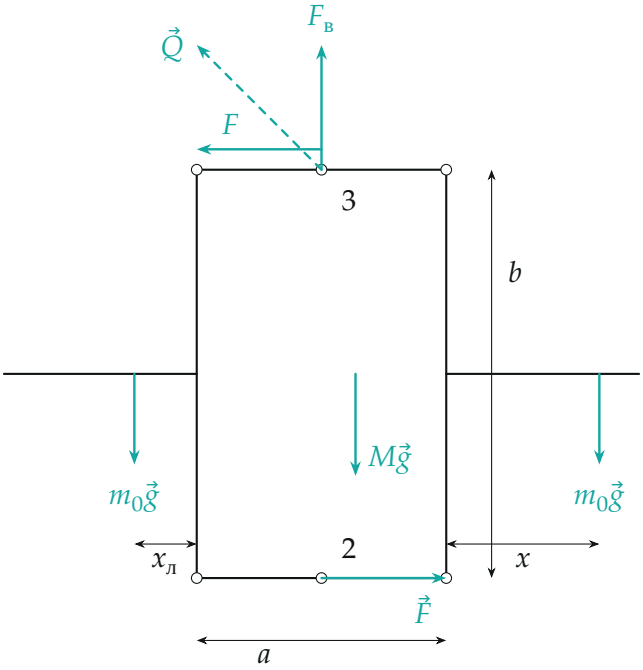
(последняя строка — «дополнительный столбец», она понадобится в пункте 8).

**Пункт 6.**

**3. Правило моментов для рамки.** Рассмотрим рамку вместе с полками и грузами в горизонтальном положении. Внешние силы: веса грузов $m_0 g$ (на плечах $x_л + a/2$ и $x + a/2$ от верхнего шарнира), вес рамки $Mg$ (в центре, плечо ноль), сила верхнего шарнира $\vec{Q}$ (плечо ноль), горизонтальная сила $F$ в нижнем шарнире (плечо $b$). Запишем правило моментов относительно верхнего шарнира (зачем: $\vec{Q}$ и $M\vec{g}$ выпадают):

$$m_0 g\left(x + \frac{a}{2}\right) = m_0 g\left(x_л + \frac{a}{2}\right) + Fb \quad \Rightarrow \quad F = \frac{m_0 g}{b}(x - x_л).$$

Зависимость линейная с наклоном $k = m_0 g/b$; трение покоя в шарнирах лишь немного сдвигает прямую ($F = \frac{m_0 g}{b}x + C$). Прямая пересекает ось $x$ там, где грузы стоят симметрично: $x = x_л$.




*Силы на рамку: веса грузов и рамки, горизонтальная $\vec{F}$ в нижнем шарнире 2, сила $\vec{Q}$ верхнего шарнира 3 с составляющими $F_в$ и $F$.*

**Пункт 5 и 7.**

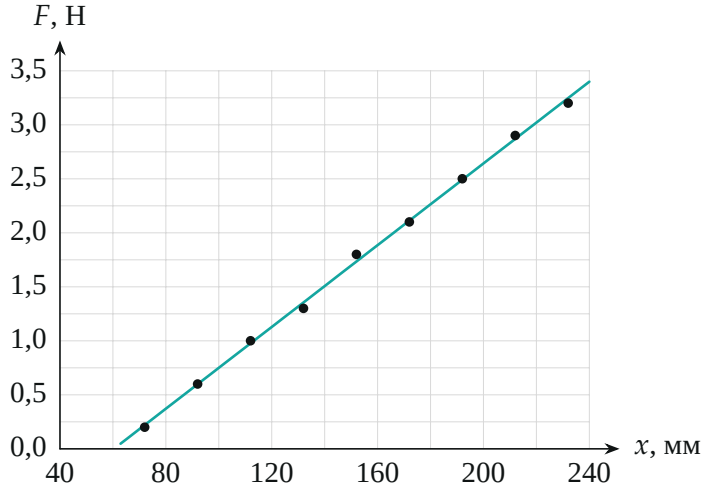
**4. График и масса груза.** Точки ложатся на прямую. Метод наименьших квадратов даёт

$$k = 18{,}9\ \text{Н/м}, \qquad C = -1{,}14\ \text{Н}, \qquad x_л = -C/k \approx 60\ \text{мм}$$

— левый груз действительно стоит у самой рейки (ближайшее отверстие 52 мм), что подтверждает формулу. Масса груза

$$m_0 = \frac{kb}{g} = \frac{18{,}9 \cdot 0{,}300}{10} \approx 0{,}567\ \text{кг}.$$

Погрешность. Разброс точек относительно прямой даёт случайную погрешность наклона $\approx 0{,}3$ Н/м; главная же — цена деления динамометра 0,1 Н при перепаде сил 3 Н: крайние прямые через кресты $\pm 0{,}1$ Н у концов дают $k$ от 17,7 до 20,0 Н/м, то есть $\pm 6\%$. Итого $m_0 = (570 \pm 40)$ г.




*Зависимость $F(x)$: точки измерений и прямая наименьших квадратов $F = 18{,}9\,x - 1{,}14$ ($x$ в метрах).*

**Пункт 8.**

**5. Сила в верхнем шарнире.** Нижний шарнир болтается в широком отверстии и вертикальной силы не создаёт, поэтому весь вес держит верхний шарнир: по условию равновесия рамки по вертикали $F_{\text{в}} = 2m_0 g + Mg$, по горизонтали он компенсирует $F$. Значит,

$$Q = \sqrt{F_{\text{в}}^2 + F^2}.$$

Дополнительное измерение — масса рамки $M$. Кладём основание на угол стола так, чтобы рамка его не касалась, и тянем рамку динамометром вверх за петлю у края; когда шарнир висит свободно, динамометр показывает $F_1 = 1{,}4$ Н. Правило моментов относительно противоположного края (вес рамки в её центре): $F_1 b = Mg\,\frac{b}{2}$, откуда $M = 2F_1/g = 0{,}28$ кг. Тогда

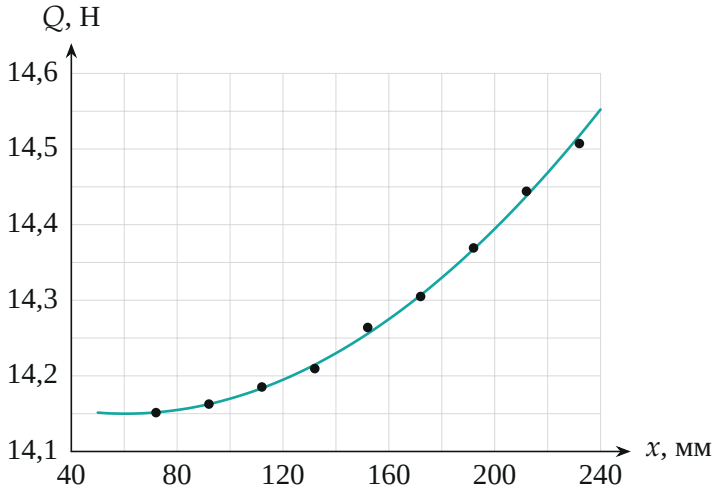
$$F_{\text{в}} = 2 \cdot 0{,}567 \cdot 10 + 0{,}28 \cdot 10 \approx 14{,}15 \text{ Н},$$

и по формуле получаем строку $Q$ таблицы.

**Пункт 9.** График $Q(x)$ — ветвь параболы, а не прямая: при $F \ll F_в$

$$Q = F_в\sqrt{1 + \frac{F^2}{F_в^2}} \approx F_в + \frac{F^2}{2F_в},$$

а $F$ линейна по $x$. Рост мал — всего 0,4 Н на 14 Н.




*Зависимость $Q(x)$: точки — по формуле из измеренных $F$, линия — по прямой $F(x)$.*

Обратите внимание: «правило моментов не выполняется» только кажется — момент груза на полке передаётся через рейку и перекладины на нижний шарнир в виде горизонтальной силы; именно она и меняется с $x$, а равновесие весов от $x$ не зависит.

**Проверка.** Размерности: $[\Delta m\, g\, a] =$ Н·м, $[kb/g] =$ кг. Независимая проверка $m_0$ — точка пересечения прямой с осью $x$ попала на место левого груза. Масса $570 \pm 40$ г согласуется с эталонной 560 г.

**Ответ.** 1) $a = 184$ мм, $b = 300$ мм; 2) $M_1 = \Delta m\, g\, a/2 \approx 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ Н·м; 3) $M_2 \approx 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ Н·м, $n \approx 4{,}6$; 4–5) таблица и график $F(x)$ — прямая; 6) $F = \dfrac{m_0 g}{b}(x - x_л)$; 7) $m_0 = kb/g = (570 \pm 40)$ г; 8) $Q = \sqrt{(2m_0 g + Mg)^2 + F^2}$, $M = 0{,}28$ кг; 9) $Q$ растёт от 14,15 до 14,5 Н по параболе.