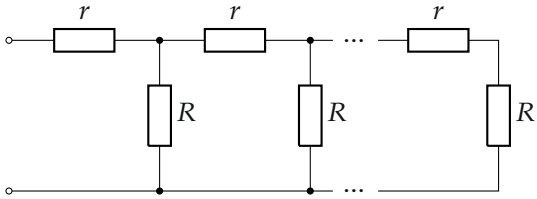
Путь в бесконечность

Задача 2. [ВсОШ 2023/24, 9 класс, задача 2] «Путь в бесконечность». Впервые вычислить эквивалентное сопротивление электрической цепи (см. рисунок), состоящей из очень большого числа звеньев, было предложено участникам I Международной олимпиады по физике в 1967 году. С тех пор эта задача стала классической. Сегодня же вам предстоит экспериментально исследовать, как зависит сопротивление данной цепи от числа звеньев в ней.



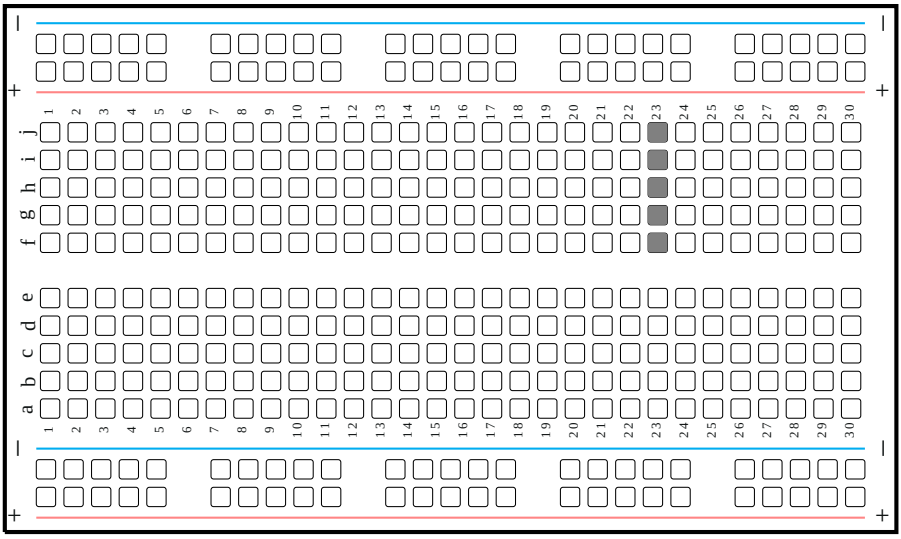
1. Определите сопротивления всех резисторов и проверьте, что все резисторы r и все резисторы R ($r \ll R$) имеют одинаковые сопротивления в пределах точности измерений мультиметра. Считайте погрешность мультиметра в этом и последующих пунктах равной трём единицам последнего разряда. Если есть резисторы R, сопротивление которых отличается больше, чем на 1 %, попросите их заменить. Вычислите средние значения R и r и их погрешности.
2. Снимите зависимость эквивалентного сопротивления цепи (см. рисунок) $\Omega(n)$ от числа звеньев n для $n = 1, 2, \ldots, 7$. Для $n = 7$ начертите Вашу схему подключения резисторов, проводов и мультиметра на макетной плате. Для этого Вам выдан бланк с напечатанной схемой макетной платы. Резисторы сопротивлением R обозначайте на схеме в виде закрашенных прямоугольников, а резисторы сопротивлением r — в виде незакрашенных. Если схему для $n = 7$ собрать не удалось, то начертите схему подключения для цепи с максимальным числом звеньев.
   Без начерченной схемы Ваши экспериментальные данные и расчёты не будут оцениваться.

3. Используя средние значения r и R из первого пункта, рассчитайте теоретическое значение $\Omega(\infty)$ сопротивления цепи, состоящей из очень большого ($n \gg 1$) числа звеньев.
4. Нанесите точки снятой зависимости $\Omega(n)$ на график. Соедините эти точки гладкой линией. На этом же графике постройте горизонтальную прямую $\Omega = \Omega(\infty)$. Это тот предел (горизонтальная асимптота), к которой должны стремиться точки измеренной зависимости $\Omega(n)$.
5. В приближении $n^2 r \ll R$ (считайте, что данное приближение верно для всех $n \leqslant 7$) зависимость эквивалентного сопротивления от количества звеньев принимает вид $\Omega(n) = F(R, n) + f(r, n)$, где $f(r, n)$ — небольшая добавка, равная

$$f(r, n) = \frac{(2n + 1)(n + 1)}{6n} r,$$

а $F(R, n)$ — основной член, зависящий только от R и n. Чему равна функция $F(R, n)$?
6. С учётом теоретической зависимости, полученной в предыдущем пункте, подберите такие координаты, в которых измеренная Вами зависимость $\Omega(n)$ будет линейной. Постройте график линеаризованной зависимости.
7. Из графика, построенного в предыдущем пункте, определите сопротивления r и R и их погрешности. Сравните полученные значения R и r с результатами прямых измерений в пункте 1.

Примечание: макетная плата используется для соединения проводов и подключения различных элементов. Каждые пять соседних гнёзд макетной платы, расположенные в одном столбце, внутри платы соединены между собой. Все гнёзда макетной платы, расположенные в двух крайних строках платы с каждой её стороны, промаркированные красным и синим цветами, также соединены между собой.



Оборудование: макетная плата, 7 пар резисторов r и R ($R \gg r$) в зип-пакете, мультиметр с проводами типа «банан–крокодил», пара соединительных проводов для макетной платы.

▲ **Решение. Что происходит.** Цепочка звеньев «r последовательно, R поперёк». Если $r = 0$, все R просто параллельны, и $\Omega = R/n$ падает до нуля; из-за r сопротивление цепочки не может стать меньше предела Ω_∞ бесконечной цепочки. Теорию даёт классический приём «бесконечная цепь не замечает ещё одного звена», а обработку — линеаризация: подобрать координаты, в которых $\Omega(n)$ — прямая, и прочитать R и r из её отрезка и наклона. Ниже — обработка данных контрольного опыта организаторов.

Обозначения. n — число звеньев, $\Omega(n)$ — сопротивление цепи из n звеньев, Ω_∞ — предел при $n \to \infty$; $y = n\Omega$, $x = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ — координаты линеаризации.

Пункт 1. Резисторы. Каждый резистор мерим омметром отдельно (погрешность — три единицы последнего разряда):

r, кОм	9,89	9,94	9,99	9,95	9,98	9,93	9,94
R, кОм	997	998	998	996	997	997	1000

Все R совпадают в пределах 0,4%, все r — в пределах 1%. Средние и

разброс: $r = (9{,}95 \pm 0{,}06)$ кОм, $R = (998 \pm 4)$ кОм (погрешность — полуразмах значений плюс погрешность прибора).

Пункт 2. Измерения $\Omega(n)$. Цепь собираем на макетной плате: каждое звено — столбец гнёзд (5 гнёзд столбца соединены), r соединяет соседние столбцы, R — столбец с синей шиной, мультиметр подключаем к первому столбцу и к синей шине. Цепь из n звеньев — это первые n звеньев: последний R ставится в столбец n, лишние звенья отключаются.

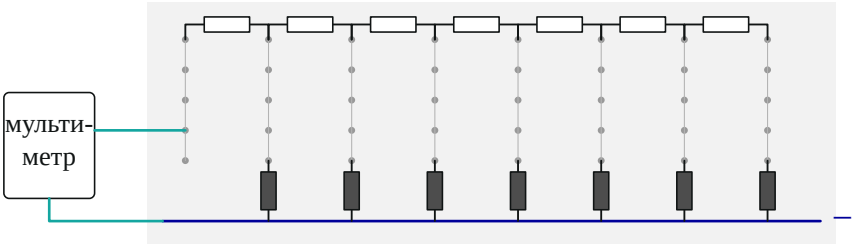


Схема на макетной плате для $n = 7$: незакрашенные — r между соседними столбцами, закрашенные — R от столбцов к синей шине.

n	1	2	3	4	5	6	7
Ω, кОм	1007	511	348	268	221	191	170

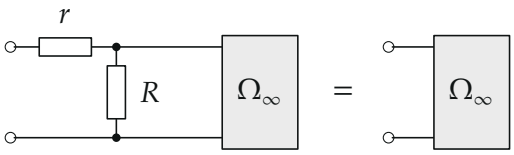
Погрешность каждого значения ± 3 кОм.

Пункт 3. Предел Ω_∞. Если к бесконечной цепочке спереди добавить ещё одно звено, получится та же бесконечная цепочка. Значит, Ω_∞ равно сопротивлению звена, нагруженного на Ω_∞: r последовательно с параллельными R и Ω_∞:

$$\Omega_\infty = r + \frac{R\,\Omega_\infty}{R + \Omega_\infty} \quad \Rightarrow \quad \Omega_\infty^2 - r\Omega_\infty - rR = 0,$$

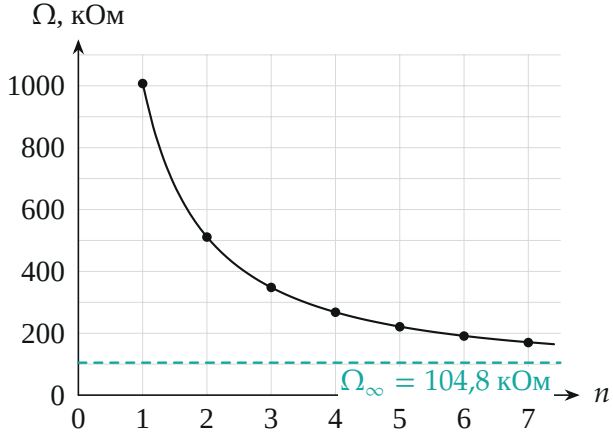
$$\Omega_\infty = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4rR}}{2} \approx 104{,}8 \text{ кОм}$$

(второй корень отрицателен). Погрешность от r и R: $\Omega_\infty \approx \sqrt{rR}$, относительная — $\frac{1}{2}(0{,}6\% + 0{,}4\%) = 0{,}5\%$, то есть $\pm 0{,}5$ кОм.



Бесконечная цепочка с добавленным спереди звеном — та же цепочка.

Пункт 4. Точки $\Omega(n)$ быстро спадают и приближаются к асимптоте Ω_∞ (график ниже). При $n = 7$ ещё далеко: 170 кОм против 105 — асимптота достигается только при $n \sim \sqrt{R/r} \approx 10$ и больше.



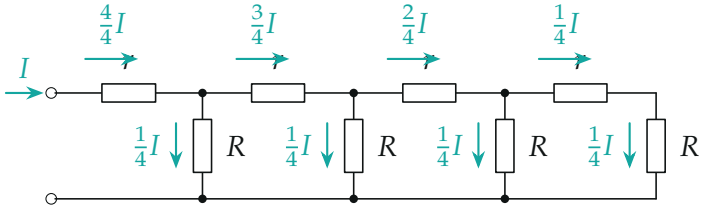
Измеренные $\Omega(n)$, гладкая линия по формуле пункта 5 и асимптота Ω_∞.

Пункт 5. Основной член. При $r = 0$ все резисторы R подключены к одним и тем же двум проводам, то есть параллельны:

$$F(R,n) = \frac{R}{n}, \qquad \Omega(n) = \frac{R}{n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\,r.$$

Откуда берётся поправка (проверка формулы условия). При малом r ток I делится между одинаковыми R поровну, по I/n. Через k-й резистор r идёт ток всех R правее него: $\frac{n-k+1}{n}I$. Выделяемая на всех r мощность $rI^2\sum_{m=1}^{n} m^2/n^2$ равна $I^2\Delta\Omega$:

$$\Delta\Omega = \frac{r}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}\,r.$$



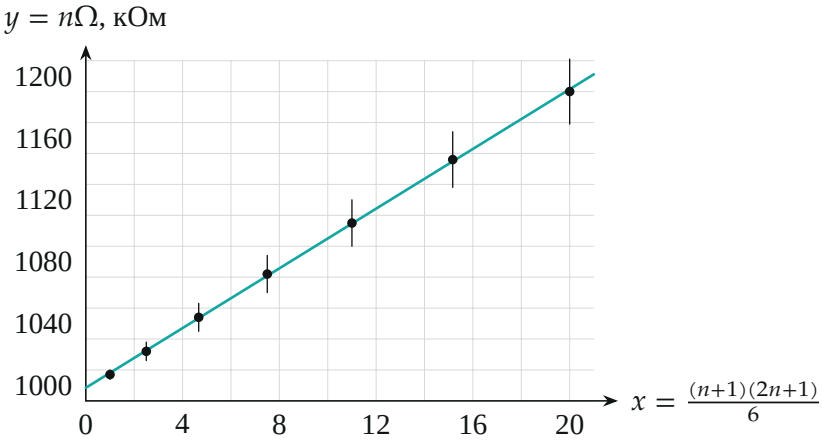
При $r \ll R/n^2$ ток делится между резисторами R поровну ($n = 4$); через резисторы r идут доли $\frac{4}{4}I, \frac{3}{4}I, \ldots$

Пункт 6. Линеаризация. Умножим формулу на n:

$$n\Omega = R + r\,\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = R + r\,x.$$

В координатах $x = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$, $y = n\Omega$ зависимость линейна: отрезок на оси y — R, наклон — r. Погрешность y равна $3n$ кОм.

x	1,0	2,5	4,67	7,5	11,0	15,17	20,0
y, кОм	1007	1022	1044	1072	1105	1146	1190
Δy, кОм	3	6	9	12	15	18	21



Линеаризованная зависимость $y(x)$ с отрезками погрешностей и прямая наименьших квадратов.

Пункт 7. R и r из графика. Метод наименьших квадратов даёт $y = 998{,}4 + 9{,}65\,x$ (кОм). Погрешность наклона определяют крайние точки: при допусках ± 3 и ± 21 кОм на концах интервала $\Delta x = 19$ наклон может меняться на $(3+21)/19 \approx 1{,}3$ кОм; отрезок — в пределах погрешности первой точки:

$$R = (998 \pm 4)\ \text{кОм}, \qquad r = (9{,}7 \pm 1{,}3)\ \text{кОм}.$$

С прямыми измерениями (998 и 9,95 кОм) совпадает в пределах погрешности. R из графика определяется точно (это почти $\Omega(1)$), а r — грубо: его вклад в Ω при $n \le 7$ всего несколько процентов.

Обратите внимание: формула пункта 5 приближённая. Точный расчёт цепочки ($\Omega_k = r + R\Omega_{k-1}/(R + \Omega_{k-1})$) при $n = 7$ даёт 170,3 кОм против 171,0 по приближённой формуле — различие меньше погрешности измерения, приближение $n^2 r \ll R$ ($490 \ll 998$) ещё работает, но на пределе.

Проверка. Размерности: $[\sqrt{rR}] =$ Ом. Пределы: $r \to 0$ — $\Omega_\infty \to 0$ (бесконечно много параллельных R); $R \to \infty$ — $\Omega_\infty \to \infty$ (цепочка из одних r). Точный пересчёт цепочки по средним r, R даёт 1008, 511, 348, 268, 221, 191, 170 кОм — совпадает с измерениями.

Ответ. 1) $r = (9{,}95 \pm 0{,}06)$ кОм, $R = (998 \pm 4)$ кОм; 2) таблица $\Omega(n)$: 1007, 511, 348, 268, 221, 191, 170 кОм; 3) $\Omega_\infty = \dfrac{r + \sqrt{r^2 + 4rR}}{2} \approx (104{,}8 \pm 0{,}5)$ кОм; 5) $F(R, n) = R/n$; 6) $y = n\Omega$ от $x = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ — прямая $y = R + rx$; 7) $R = (998 \pm 4)$ кОм, $r = (9{,}7 \pm 1{,}3)$ кОм, совпадают с прямыми измерениями.