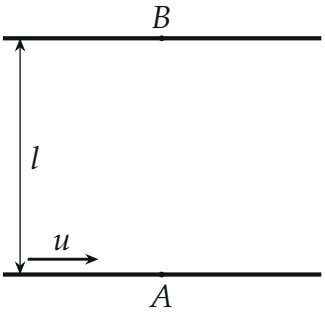
Переправа

Задача 1. [ВсОШ 2024/25, заключительный этап, 10 класс, теоретический тур, задача 1] «Переправа».

Из пункта A, расположенного на одном берегу реки шириной l, переправляется на противоположный берег небольшая моторная лодка. Берега реки параллельны друг другу. Скорость течения реки везде одинакова и равна u. На противоположном берегу реки на одном перпендикуляре к берегам с пунктом A расположен пункт B. Скорость лодки **относительно воды** постоянна по величине и равна $2u$, а её вектор в течение всего времени переправы перпендикулярен прямой BC, где C — центр лодки. В некоторый момент времени t_1 скорость лодки **относительно берега** перпендикулярна линии берега.

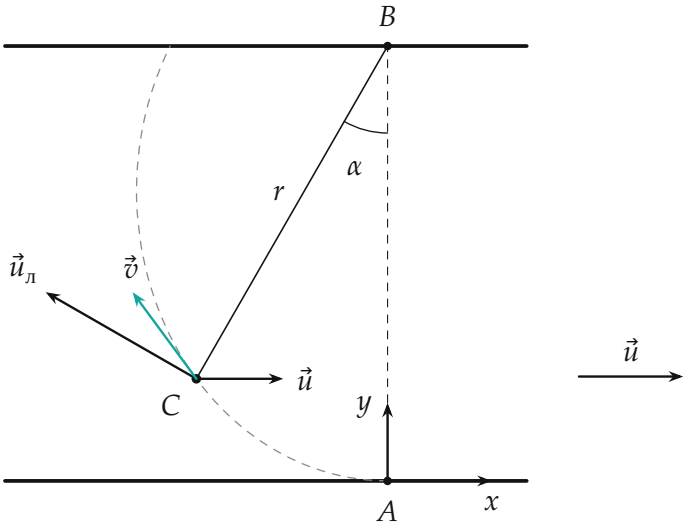


1. В каком направлении лодка начала движение из пункта A: по течению или против течения? Ответ обоснуйте.
2. Найдите угол $\angle ABC$ в момент времени t_1.
3. На каком расстоянии от пункта B будет находиться лодка, когда она достигнет противоположного берега реки?
4. На каком расстоянии от пункта B будет находиться лодка в момент времени t_1?
5. Найдите радиус кривизны траектории лодки в системе отсчёта берега для двух случаев: а) в момент старта из пункта A; б) в момент времени t_1.

▲ **Решение. Что происходит.** Лодка «рулит на пункт B боком»: её скорость относительно воды всё время перпендикулярна направлению на

B. Скорость относительно берега — сумма этой скорости и течения (закон сложения скоростей). Задача из класса «погоня»: траекторию в явном виде искать не нужно, достаточно записать, как за малое время dt меняются расстояние $r = BC$ и координата y поперёк реки, и найти их комбинацию, которая не меняется. Главная идея — $2r + y = \text{const}$.

Обозначения. Ось x — вдоль течения, ось y — от A к B, начало в A. $r = BC$ — расстояние от B до лодки, $\alpha = \angle ABC$ — угол между BA и BC. $\vec{u}$ — скорость течения, $\vec{u}_л$ ($u_л = 2u$) — скорость лодки относительно воды, $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}_л$ — скорость относительно берега.



Лодка в произвольный момент (против течения). Скорость относительно воды $\vec{u}_л \perp BC$, течение $\vec{u}$, скорость относительно берега $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}_л$.

Пункт 1. Направление старта. В пункте A прямая BC совпадает с BA, она перпендикулярна берегу, поэтому $\vec{u}_л$ направлена вдоль берега: либо по течению, либо против. Предположим, лодка стартовала *по течению*. Тогда $\vec{u}_л$ имеет составляющую $2u\cos\alpha$ вдоль течения, а лодка всё время находится ниже по течению от прямой AB, и $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ до самого противоположного берега. Проекция скорости относительно берега на ось x

$$v_x = u + 2u\cos\alpha \geqslant u > 0$$

никогда не обращается в ноль — скорость не может стать перпендикулярной берегу, а по условию в момент t_1 это происходит. Значит, лодка начала движение **против течения**: в A её скорость относительно берега $v_A = 2u - u = u$ направлена против течения.

Пункт 2. Угол в момент t_1. Теперь лодка левее AB (рисунок выше). Направление от B к C составляет угол α с BA, перпендикуляр к нему, направленный к дальнему берегу, — $(-\cos\alpha;\ \sin\alpha)$. Скорость лодки относительно берега в проекциях на оси:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}_л: \qquad v_x = u - 2u\cos\alpha, \qquad v_y = 2u\sin\alpha.$$

В момент t_1 скорость перпендикулярна берегу, т. е. $v_x = 0$:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{2}, \qquad \angle ABC = \alpha_1 = 60^\circ.$$

Пункт 3. Сохраняющаяся величина. Рассмотрим малый промежуток dt. Расстояние r меняется только за счёт проекции $\vec{v}$ на прямую CB; $\vec{u}_л$ ей перпендикулярна и r не меняет, а проекция $\vec{u}$ на направление $C \to B$ равна $u\sin\alpha$:

$$dr = -u\sin\alpha\, dt.$$

Координата y меняется со скоростью v_y:

$$dy = 2u\sin\alpha\, dt.$$

Умножим первое равенство на 2 и сложим со вторым: $2\,dr + dy = 0$. Просуммируем эти изменения от старта до произвольного момента: величина $2r + y$ не меняется. В начале $r = l$, $y = 0$, поэтому в любой момент

$$2r + y = 2l, \qquad r = l - \frac{y}{2}.$$

У противоположного берега $y = l$:

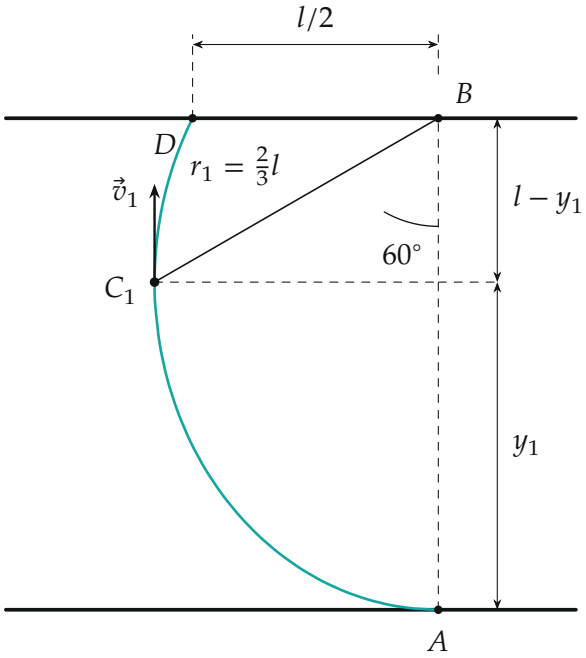
$$r_б = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}.$$

Лодка пристаёт на расстоянии $l/2$ от B выше по течению (на рисунке ниже — точка D). При этом $l - y = r\cos\alpha = 0$, т. е. $\alpha = 90°$: лодка подходит к берегу вдоль него, и её скорость $v = 2u - u = u$ направлена против течения.

Пункт 4. Расстояние в момент t_1. Из прямоугольного треугольника с гипотенузой BC (рисунок ниже) расстояние от лодки до дальнего берега $l - y = r\cos\alpha$. Вместе с $r = l - y/2$ и $\cos\alpha_1 = 1/2$:

$$l - y_1 = \frac{1}{2}\left(l - \frac{y_1}{2}\right) \Rightarrow y_1 = \frac{2}{3}l, \qquad r_1 = l - \frac{y_1}{2} = \frac{2}{3}l.$$

Лодка в этот момент на высоте $y_1 = 2l/3$ и на расстоянии $r_1 \sin 60° = l/\sqrt{3}$ выше по течению от AB.



Траектория лодки, вычисленная по уравнениям пункта 3 (бирюзовая). В момент t_1 лодка в точке C_1, скорость вертикальна; пристаёт в точке D.

Пункт 5. Радиус кривизны. Радиус кривизны $R = v^2/a_n$, где a_n — составляющая ускорения, перпендикулярная скорости. Нужно найти

ускорение.

Ускорение. Продифференцируем закон сложения скоростей: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{u}}{dt} + \dfrac{d\vec{u}_л}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_л}{dt}$, потому что течение постоянно. Вектор $\vec{u}_л$ постоянен по модулю и поворачивается вместе с прямой BC, с той же угловой скоростью $\omega = d\alpha/dt$. Конец вектора длиной $2u$ движется по окружности, поэтому

$$a = 2u\,\omega,$$

и ускорение перпендикулярно $\vec{u}_л$, т. е. направлено вдоль прямой CB (к пункту B).

Угловая скорость прямой BC. Она равна составляющей скорости лодки, перпендикулярной BC, делённой на r. Эта составляющая — $2u$ от $\vec{u}_л$ минус проекция течения $u\cos\alpha$ (течение направлено против $\vec{u}_л$ по этой оси):

$$\omega = \frac{2u - u\cos\alpha}{r}.$$

а) Старт. $\alpha = 0$, $r = l$: $\omega_A = u/l$, $a_A = 2u^2/l$, ускорение направлено к B, т. е. перпендикулярно скорости $v_A = u$ (она вдоль берега). Всё ускорение нормальное:

$$R_A = \frac{v_A^2}{a_A} = \frac{u^2}{2u^2/l} = \frac{l}{2}.$$

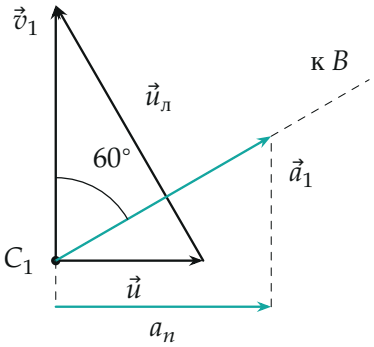
б) Момент t_1. $\alpha = 60°$, $r_1 = 2l/3$:

$$\omega_1 = \frac{2u - u/2}{2l/3} = \frac{9u}{4l}, \qquad a_1 = 2u\,\omega_1 = \frac{9u^2}{2l}.$$

Скорость $v_1 = v_y = 2u\sin 60° = \sqrt{3}\,u$ направлена поперёк реки, поэтому нормальная составляющая ускорения — его проекция на ось x. Ускорение направлено вдоль C_1B, под углом $60°$ к оси y, и $a_n = a_1\sin 60° =$

$\dfrac{9\sqrt{3}\,u^2}{4l}$:

$$R_1 = \frac{v_1^2}{a_n} = \frac{3u^2}{9\sqrt{3}\,u^2/(4l)} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\,l \approx 0{,}77\,l.$$



Момент t_1: треугольник скоростей $\vec{v}_1 = \vec{u} + \vec{u}_л$ и ускорение $\vec{a}_1$ вдоль C_1B; нормальная составляющая a_n перпендикулярна $\vec{v}_1$.

Обратите внимание. Ускорение лодки относительно берега — это только поворот вектора $\vec{u}_л$: течение постоянно и в ускорение не входит. А угловая скорость поворота $\vec{u}_л$ — это угловая скорость прямой BC, которую считают по *полной* скорости лодки относительно берега, а не по $2u$.

Проверка. Размерности: r, R — длины, $\omega = [\text{м/с}]/[\text{м}]$ — с^{-1}. Связь $r = l - y/2$ проверена у дальнего берега второй раз: там $l - y = r\cos\alpha = 0$ даёт $\alpha = 90°$, скорость $\vec{u}_л$ вдоль берега — лодка действительно выходит на берег по касательной. Численное интегрирование уравнений движения (шаг $10^{-6}\,l/u$) даёт $r_б = 0{,}500\,l$, $r_1 = 0{,}667\,l$ при $\alpha = 60°$, $R_A = 0{,}500\,l$, $R_1 = 0{,}770\,l$ — совпадает. Смысл: лодка, «целясь боком» на B, сначала сносится против течения, потом её разворачивает, и к берегу она подходит в половине ширины реки от B.

Ответ. 1) против течения; 2) $\angle ABC = 60°$; 3) $l/2$; 4) $2l/3$; 5) а) $R_A = l/2$, б) $R_1 = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}\,l \approx 0{,}77\,l$.