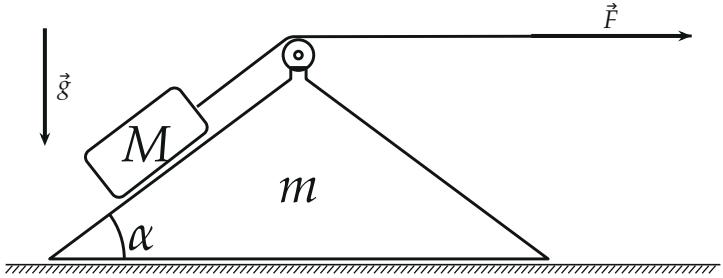
Призма

Задача 2. [ВсОШ 2024/25, заключительный этап, 10 класс, теоретический тур, задача 2] «Призма».

На шероховатой горизонтальной поверхности стола находится система, состоящая из призмы массой m, снабжённой лёгким блоком, и бруска массой $M = 2m$ (см. рис.). Боковая поверхность призмы является гладкой, а угол между гранью, на которой находится брусок, и поверхностью стола равен α ($\sin\alpha = 3/5$). К бруску привязана лёгкая нерастяжимая нить, перекинутая через блок, к противоположному концу которой приложена горизонтальная сила F. Известно, что ускорение призмы не зависит от величины этой силы.



1. Определите возможные значения коэффициента трения μ между призмой и поверхностью стола.
2. Для каждого из полученных в пункте 1 значений μ найдите ускорение призмы a.

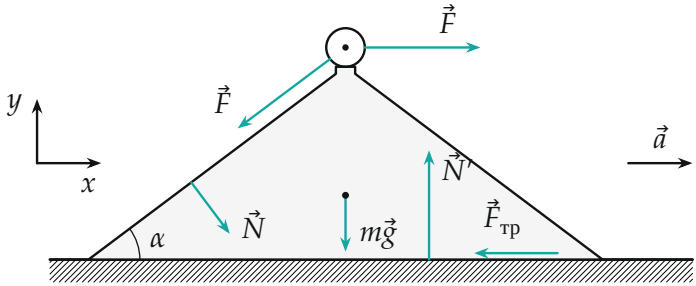
Ускорение свободного падения равно g. Наклонный отрезок нити параллелен левой боковой грани призмы. Трение в оси блока отсутствует.

▲ **Решение. Что происходит.** Нить тянет брусок вверх по грани, а блок — вместе с призмой — нить тянет и вправо, и вниз по грани. Сила F входит в уравнение движения призмы дважды: толкает её вправо (через блок) и прижимает к столу, увеличивая трение. Ускорение призмы не зависит от F только в двух случаях: либо при скольжении эти два вклада в точности сокращаются, либо призма вообще стоит при любой F. Ключ

— сила давления бруска на грань N: она не содержит F, потому что нить параллельна грани и в уравнение для нормали не входит.

Обозначения. Ось x — горизонтально вправо, ось y — вверх. N — сила взаимодействия бруска и призмы (по нормали к гладкой грани), N' и $F_{\text{тр}}$ — нормальная реакция и сила трения стола, a — ускорение призмы, a' — ускорение бруска относительно призмы (вдоль грани). Натяжение нити всюду равно F (нить и блок лёгкие, трения в оси нет). $\cos\alpha = 4/5$.

1. Силы, действующие на призму. Блок закреплён на призме, поэтому на призму действуют обе ветви нити: горизонтальная — F вправо, наклонная — F вниз вдоль грани. Брусок давит на грань с силой N, направленной по нормали внутрь призмы.



Силы, действующие на призму вместе с блоком. Нормальная реакция N' и трение $F_{тр}$ действуют по всей опоре; изображены их равнодействующие.

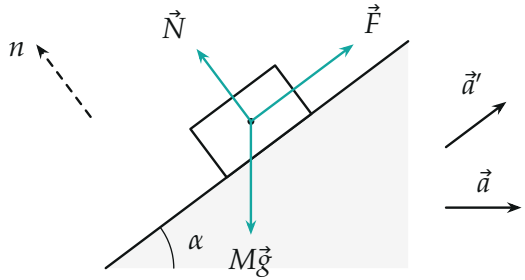
Второй закон Ньютона для призмы в проекциях на оси x и y (по y призма не движется):

$$x: \quad ma = N\sin\alpha + F - F\cos\alpha - F_{\text{тр}},$$

$$y: \quad 0 = N' - mg - N\cos\alpha - F\sin\alpha \;\Rightarrow\; N' = mg + N\cos\alpha + F\sin\alpha.$$

Сила F прижимает призму к столу (слагаемое $F\sin\alpha$ в N') — от этого растёт предельная сила трения.

2. Сила давления бруска. Ускорение бруска относительно стола — сумма ускорения призмы $\vec{a}$ и относительного $\vec{a}'$ вдоль грани. Ось n направим по нормали к грани, наружу. Зачем такая ось: $\vec{a}'$ и натяжение нити на неё не проецируются, и в уравнении останется одна неизвестная N.



Тело M: сила тяжести, реакция грани $\vec{N}$ и натяжение нити $\vec{F}$ вдоль грани; ускорение призмы $\vec{a}$ и ускорение бруска относительно призмы $\vec{a}'$.

Второй закон Ньютона для бруска в проекции на ось n: $\vec{a}' \perp n$, проекция $\vec{a}$ равна $-a\sin\alpha$, нить на n не проецируется:

$$-Ma\sin\alpha = N - Mg\cos\alpha \;\Rightarrow\; N = M(g\cos\alpha - a\sin\alpha).$$

В N сила F не входит явно, а a от F по условию не зависит, значит, и N от F не зависит.

Пункт 1. Возможные μ. Призма либо скользит по столу, либо покоится — разберём оба случая.

Случай А: призма скользит ($a > 0$, вправо). Трение скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N'$ направлено влево. Подставим в уравнение по оси x и соберём слагаемые с F:

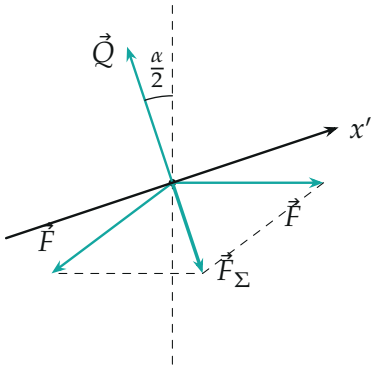
$$ma = N(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \mu mg + F\,(1 - \cos\alpha - \mu\sin\alpha).$$

Всё, кроме последнего слагаемого, от F не зависит. Чтобы a не зависело от F, коэффициент при F должен быть нулём:

$$\mu = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-4/5}{3/5} = \frac{1}{3}.$$

Второй способ (коротко, геометрически). Обе ветви нити действуют на блок с равными силами F, их сумма $\vec{F}_\Sigma$ направлена по биссектрисе угла между ними — под углом $\alpha/2$ к вертикали. Сложим силы стола в одну: $\vec{Q} = \vec{N}' + \vec{F}_{\text{тр}}$, при скольжении $\vec{Q}$ отклонена от вертикали на угол φ, $\operatorname{tg}\varphi = \mu$. Спроецируем второй закон Ньютона для призмы на ось

$x' \perp \vec{F}_\Sigma$: F_Σ выпадает, остальные силы (N, mg) и ma от F не зависят, значит, и проекция $\vec{Q}$ на x' от F не зависит. Но модуль Q растёт с F — поэтому проекция может не меняться, только если она равна нулю: $\vec{Q} \parallel \vec{F}_\Sigma$, $\varphi = \alpha/2$, $\mu = \operatorname{tg}(\alpha/2) = 1/3$.



Сумма сил нити $\vec{F}_\Sigma$ направлена под углом $\alpha/2$ к вертикали. Её проекция на ось x' равна нулю; полная сила стола $\vec{Q}$ при $\mu = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ ей параллельна.

Случай Б: призма покоится ($a = 0$) при любом F. Тогда $N = Mg\cos\alpha$, а нужная сила трения покоя (из уравнения по оси x) не должна превышать предельной $\mu N'$:

$$Mg\sin\alpha\cos\alpha + F(1-\cos\alpha) \leqslant \mu\,(mg + Mg\cos^2\alpha + F\sin\alpha).$$

Перенесём слагаемые с F влево:

$$F\,(1-\cos\alpha-\mu\sin\alpha) \leqslant \mu g\,(m + M\cos^2\alpha) - Mg\sin\alpha\cos\alpha.$$

Неравенство должно выполняться при любом $F \geqslant 0$. При $F = 0$ правая часть должна быть неотрицательной, а при $F \to \infty$ — коэффициент при F неположительным:

$$\mu \geqslant \frac{M\sin\alpha\cos\alpha}{m + M\cos^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}}{1+2\cdot\frac{16}{25}} = \frac{24/25}{57/25} = \frac{8}{19} \approx 0{,}42, \qquad \mu \geqslant \frac{1}{3}.$$

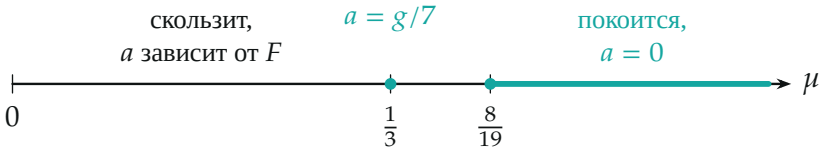
Первое условие сильнее: призма стоит при любой силе F, если $\mu \geqslant 8/19$.

Промежуточные значения не годятся: при $\mu < 1/3$ или $1/3 < \mu < 8/19$ призма при $F = 0$ уже скользит ($\mu < 8/19$), а при скольжении коэффициент при F в уравнении движения не нуль — ускорение зависит от F.

Пункт 2. Ускорение. При $\mu \geqslant 8/19$ призма покоится: $a = 0$. При $\mu = 1/3$ подставим $N = M(g\cos\alpha - a\sin\alpha)$ и $M = 2m$ в уравнение движения случая А (слагаемое с F уже нуль):

$$a = 2\Big(\frac{4}{5}g - \frac{3}{5}a\Big)\Big(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\Big) - \frac{g}{3} = \frac{8}{15}g - \frac{2}{5}a - \frac{1}{3}g \;\Rightarrow\; \frac{7}{5}a = \frac{1}{5}g, \qquad a = \frac{g}{7}.$$

Нужно убедиться, что брусок не отрывается от грани: $N = 2m(\frac{4}{5}g - \frac{3}{5}\cdot\frac{g}{7}) = \frac{10}{7}mg > 0$. И что призма действительно скользит: при $\mu = 1/3 < 8/19$ покой невозможен уже при $F = 0$.



Значения μ, при которых ускорение призмы не зависит от F (бирюзовым). Между $1/3$ и $8/19$ призма скользит, и её ускорение зависит от F.

Обратите внимание. Сила F не только тянет призму через блок, но и прижимает её к столу: наклонная ветвь нити давит на блок вниз. Без слагаемого $F\sin\alpha$ в N' сокращения вкладов F не получить.

Проверка. Размерность: μ безразмерен, a — в единицах g. Численная проверка ($g = 1$, $m = 1$): при $\mu = 1/3$ и $F = 0;\ 1;\ 10$ уравнения пункта 1 дают одно и то же $a = 0{,}1429 = 1/7$; при $\mu = 0{,}42 < 8/19$ и $F = 0$ нужная сила трения покоя $0{,}96\,mg$ больше предельной $0{,}958\,mg$ — скользит, при $\mu = 8/19$ — ровно предельная. Знак: $a > 0$ — призма едет вправо, от бруска, как и толкает её грань. Второй способ (через $\vec{Q} \parallel \vec{F}_\Sigma$) дал то же $\mu = \operatorname{tg}(\alpha/2)$. Смысл: при $\mu = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ добавка к силе нити направлена ровно вдоль «конуса трения», и весь её вклад гасит добавка трения.

Ответ. 1) $\mu = 1/3$ или $\mu \geqslant 8/19 \approx 0{,}42$; 2) при $\mu = 1/3$ $a = g/7$, при $\mu \geqslant 8/19$ $a = 0$.