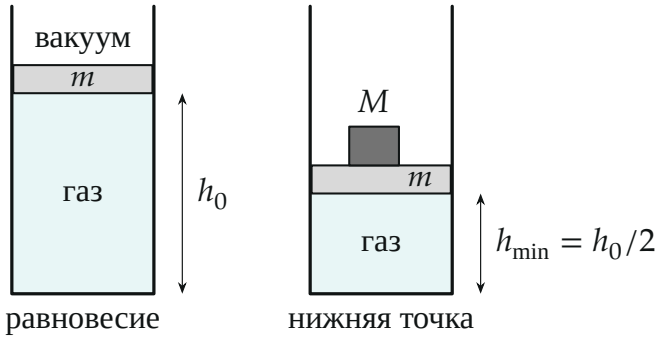
Падающий поршень

Задача 3. [ВсОШ 2024/25, заключительный этап, 10 класс, теоретический тур, задача 3] «Падающий поршень».

В цилиндрическом сосуде, установленном вертикально в поле силы тяжести, под массивным горизонтальным поршнем массой $m = 100$ кг содержится одноатомный идеальный газ. Над поршнем – вакуум. Поршень находится в равновесии и может перемещаться вдоль стенок сосуда практически без трения. Поршень закрепляют в этом равновесном положении, после чего кладут на него гирю массой M. Затем поршень освобождают. При дальнейшем движении поршня с гирей его минимальное расстояние $h_{\min}$ до дна сосуда в два раза меньше исходного расстояния $h_0 = 1{,}0$ м. Определите:



Поясняющий рисунок: начальное равновесие поршня m и первая остановка поршня с гирей M.

1. массу гири M;
2. модуль максимального ускорения $a_{\max}$ поршня с гирей в процессе движения;
3. модуль максимальной скорости $v_{\max}$ поршня с гирей в процессе движения.
4. Через длительное время поршень остановился. Найдите расстояние h до дна сосуда, на котором будет находиться поршень в состоянии нового термодинамического равновесия.

Теплоёмкость сосуда и поршня пренебрежимо мала, теплоотдача в окружающую среду отсутствует. При движении поршня от исходного положения до его первой остановки процессы в газе можно считать равновесными. Масса газа много меньше массы поршня. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Гиря нарушает равновесие: поршень с гирей падает, сжимая газ, проскакивает новое положение равновесия и останавливается внизу, потом колеблется. Пока процесс равновесный, газ сжимается адиабатически и обратимо — работает уравнение Пуассона. Над поршнем вакуум и трения нет, поэтому вся убыль механической энергии поршня с гирей уходит во внутреннюю энергию газа. Колебания со временем затухают (в газе идут необратимые процессы), и в конце механическая энергия снова целиком в газе — но уже по необратимому пути, где адиабата Пуассона не годится. Класс задачи — первое начало для теплоизолированного газа: «механика + газ = const», а для обратимого участка ещё и $pV^\gamma = \text{const}$.

Обозначения. S — площадь поршня, h — высота поршня над дном в произвольный момент, $x = h/h_0$ — безразмерная высота, $k = M/m$. Ось y — вертикально вверх. Газ одноатомный: $U = \frac{3}{2}pV$, показатель адиабаты $\gamma = 5/3$.

1. Начальное состояние. Поршень m в равновесии: сила давления газа уравновешивает силу тяжести (сверху вакуум),

$$p_0 S = mg \quad \Rightarrow \quad p_0 V_0 = mgh_0.$$

Внутренняя энергия газа $U_0 = \frac{3}{2}p_0 V_0 = \frac{3}{2}mgh_0$ — всё выражается через mgh_0.

2. Обратимый участок: давление и энергия газа. До первой остановки процесс равновесный, а теплообмена нет — это обратимая адиабата, уравнение Пуассона:

$$pV^{5/3} = p_0 V_0^{5/3} \;\Rightarrow\; p = p_0\, x^{-5/3}, \qquad pV = p_0 V_0\, x^{-2/3},$$

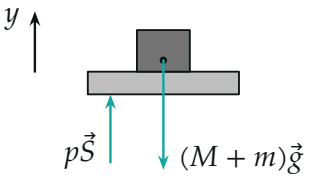
и внутренняя энергия газа

$$U = \tfrac{3}{2}\, mgh_0\, x^{-2/3}.$$

3. Закон сохранения энергии. Система «поршень + гиря + газ» теплоизолирована, трения нет, над поршнем вакуум — внешние силы, кроме тяжести, работы не совершают. Первое начало термодинамики для газа ($Q = 0$): $\Delta U = A_{\text{внеш}}$, а работа поршня над газом равна убыли механической энергии поршня с гирей. Поэтому от начала до любого момента

$$\Delta U + \Delta E_{\text{мех}} = 0:$$

$$\tfrac{3}{2}\, mgh_0(x^{-2/3} - 1) + (M+m)\, g\, h_0\, (x-1) + \frac{(M+m)v^2}{2} = 0. \qquad (1)$$



Тело «поршень + гиря»: сила тяжести и сила давления газа снизу.

Пункт 1. Масса гири. В нижней точке $x = 1/2$ и $v = 0$. Из (1), сократив gh_0:

$$\tfrac{3}{2}\, m(2^{2/3} - 1) = (M+m) \cdot \frac{1}{2},$$

$$M = m(3(2^{2/3} - 1) - 1) \approx 0{,}762\, m \approx 76 \text{ кг}.$$

Пункт 2. Максимальное ускорение. Второй закон Ньютона для поршня с гирей в проекции на ось y:

$$(M+m)a_y = pS - (M+m)g \;\Rightarrow\; \frac{a_y}{g} = \frac{x^{-5/3}}{1+k} - 1.$$

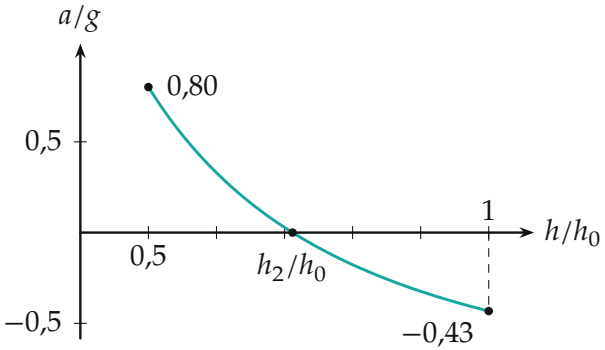
Качественно: при движении вниз x уменьшается, давление монотонно растёт, значит, a_y монотонно растёт — от отрицательного (падение уско-

ряется) до положительного (торможение). Наибольший модуль — на одном из концов участка:

$$\text{вверху } (x=1): \quad a_y = -\frac{M}{M+m}\,g \approx -0{,}43\,g;$$
$$\text{внизу } (x=\tfrac{1}{2}): \quad a_y = g\Big(\frac{2^{5/3}m}{M+m} - 1\Big) \approx 0{,}80\,g.$$

Дальше поршень колеблется с затухающей амплитудой и до этих крайних положений не доходит, поэтому

$$a_{\max} = g\Big(\frac{2^{5/3}m}{M+m} - 1\Big) \approx 0{,}80\,g = 8\ \text{м/с}^2.$$



Ускорение поршня с гирей на пути вниз (ось y вверх), вычислено по формуле пункта 2. В точке h_2 ускорение равно нулю — там скорость максимальна.

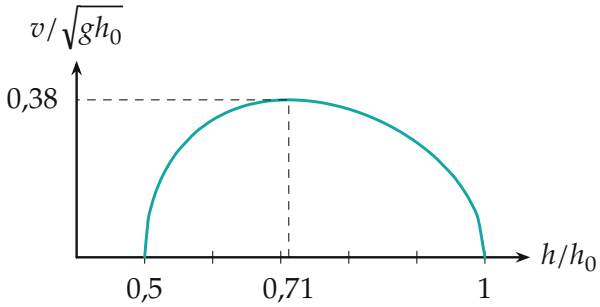
Пункт 3. Максимальная скорость. Скорость максимальна там, где $a_y = 0$ — сила давления равна силе тяжести:

$$mg\,x_2^{-5/3} = (M+m)g \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{h_2}{h_0} = (1+k)^{-3/5} \approx 0{,}712.$$

Подставим x_2 в закон сохранения энергии (1):

$$\frac{v_{\max}^2}{gh_0} = 2(1-x_2) + \frac{3}{1+k}(1-x_2^{-2/3}) \approx 0{,}576 - 0{,}433 = 0{,}143,$$

$$v_{\max} = \sqrt{0{,}143\,gh_0} \approx 1{,}2 \text{ м/с}.$$



Скорость поршня с гирей на пути вниз по закону (1): максимум $0{,}38\sqrt{gh_0}$ *при* $h_2 \approx 0{,}71\,h_0$*, в нижней точке* $h_0/2$ *скорость снова нуль.*

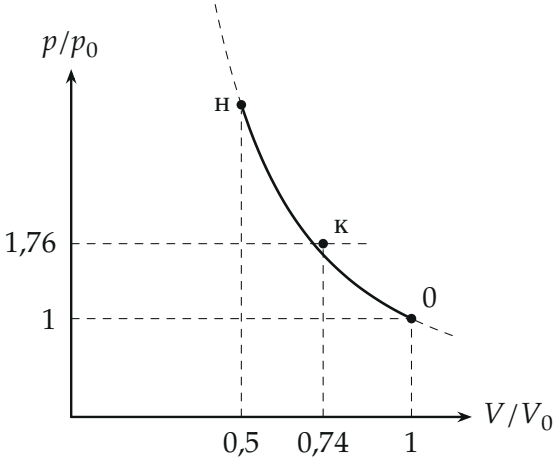
Пункт 4. Новое равновесие. Колебания затухают из-за необратимых процессов в газе: механическая энергия переходит во внутреннюю по неравновесному пути. Уравнение Пуассона здесь *неприменимо*, но закон сохранения энергии (1) верен по-прежнему, только с $U = \frac{3}{2}pV$ в конечном состоянии вместо $\frac{3}{2}mgh_0x^{-2/3}$. В новом равновесии поршень с гирей покоится:

$$pS = (M+m)g, \qquad pV = pSh = (M+m)gh.$$

Закон сохранения энергии от начала до нового равновесия ($v = 0$):

$$\tfrac{3}{2}\big((M+m)gh - mgh_0\big) + (M+m)g(h-h_0) = 0,$$

$$h = \frac{5m+2M}{5(M+m)}\,h_0 \approx 0{,}740 \text{ м}.$$



Обратимая адиабата $pV^{5/3} = \text{const}$ от начала (0) до нижней точки (н) и конечное состояние (к): $p = 1{,}76\,p_0$, $V = 0{,}74\,V_0$. Точка «к» выше адиабаты — газ нагрет сильнее, чем при обратимом сжатии до того же объёма.

Обратите внимание. В пункте 4 нельзя искать h из $p\,V^{5/3} = \text{const}$ и $p = (M+m)g/S$: это дало бы $h = h_2 \approx 0{,}71$ м — точку, где поршень пролетает с наибольшей скоростью. На самом деле его кинетическая энергия за время затухания перешла в газ, газ теплее, и поршень стоит выше: $0{,}74\,h_0 > 0{,}71\,h_0$.

Проверка. Размерность: в (1) все слагаемые $\sim mgh_0$ — джоули, $v^2 \sim gh_0$. Предел $M \to 0$: $h \to h_0$, $a_{\max} \to 0$, ничего не происходит. Численно: конечное состояние удовлетворяет закону энергии, $\frac{3}{2}(1{,}762 \cdot 0{,}7405 - 1) = 1{,}762\,(1 - 0{,}7405) = 0{,}457$. Знак: конечная точка выше адиабаты на pV-диаграмме (энтропия газа выросла, как и положено при необратимом процессе в теплоизолированной системе). Смысл: гиря опускает поршень на 26 см, а не на 29, — энергия колебаний подогрела газ.

Ответ. 1) $M = (3(2^{2/3} - 1) - 1)m \approx 76$ кг; 2) $a_{\max} = g\Big(\dfrac{2^{5/3}m}{M+m} - 1\Big) \approx 0{,}80\,g = 8$ м/с^2; 3) $v_{\max} \approx \sqrt{0{,}14\,gh_0} \approx 1{,}2$ м/с; 4) $h = \dfrac{5m + 2M}{5(M+m)}\,h_0 \approx 0{,}74$ м.