Квадрат vs круг

Задача 4. [ВсОШ 2024/25, заключительный этап, 10 класс, теоретический тур, задача 4] «Квадрат vs круг».

Из тонкой непроводящей плоской пластины вырезали пять фигур разной формы и размера. Каждую из них зарядили электрическим зарядом с постоянной, положительной и одинаковой для всех фигур поверхностной плотностью.

Первая фигура представляет собой квадрат со стороной $2a$, от которого с одного из углов отрезали квадрат со стороной a (см. рис. 1). Модуль напряжённости электрического поля, созданного в точке O зарядами на поверхности такой фигуры, равен E_0.

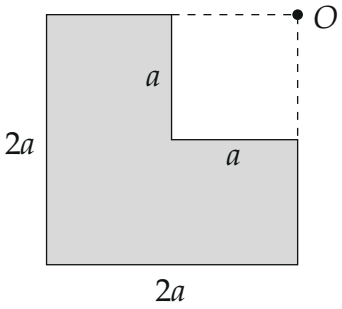


Рис. 1

1. Чему равно отношение E'/E_0, где E' – модуль напряжённости электрического поля, созданного в точке O' второй заряженной фигурой, имеющей форму квадрата со стороной $2\lambda a$, от которого с одного из углов отрезали квадрат со стороной λa (рис. 2)? λ – некоторое положительное число.

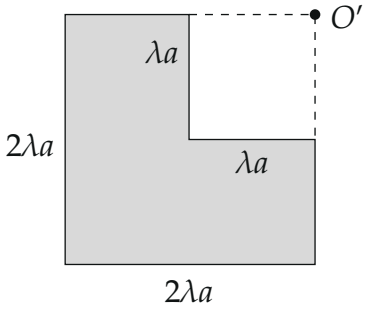


Рис. 2

2. Определите модуль и направление вектора напряжённости $\vec{E}_A$ электрического поля, созданного в точке A третьей заряженной фигурой, представляющей собой квадрат со стороной $8a$, от которого с одного из углов отрезали квадрат со стороной a (рис. 3). Модуль вектора $\vec{E}_A$ выразите через величину E_0.

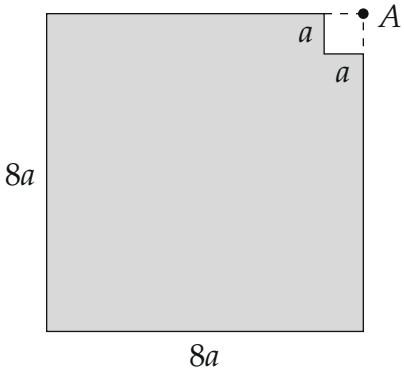


Рис. 3

3. Определите модуль и направление вектора напряжённости $\vec{E}_B$ электрического поля, созданного в точке B четвёртой заряженной фигурой, имеющей форму четверти кольца (рис. 4), внутренний радиус которого равен a, а внешний – $2a$. Модуль вектора $\vec{E}_B$ выразите через E_0.

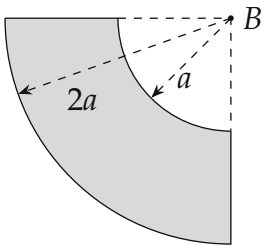


Рис. 4

4. Определите модуль и направление вектора напряжённости $\vec{E}_C$ электрического поля, созданного в точке C пятой заряженной фигурой, имеющей форму трапеции (рис. 5), одно основание которой равно a, второе – $2a$. Модуль вектора $\vec{E}_C$ выразите через E_0. Углы при большем основании данной трапеции указаны на рисунке.

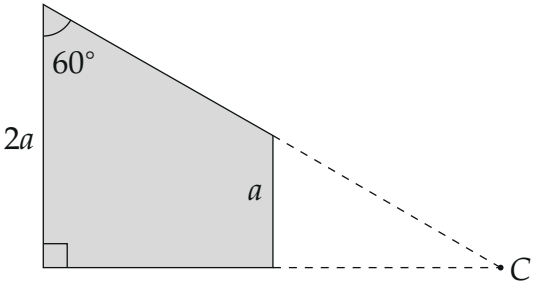


Рис. 5

Точки O, O', A, B и C находятся в одной плоскости с соответствующей фигурой.

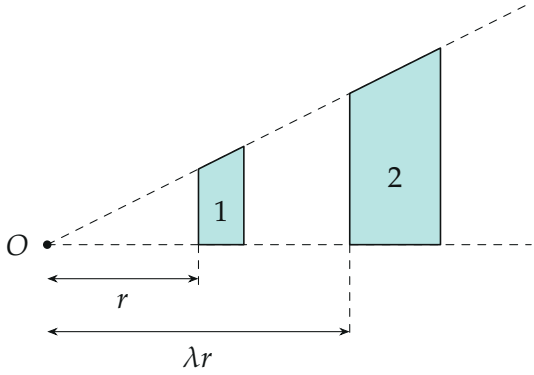
▲ **Решение. Что происходит.** Считать интеграл по фигуре не нужно: всё решает подобие. Маленькая площадка, увеличенная в λ раз относительно точки наблюдения, несёт в λ^2 раз больший заряд, но и расстояние до неё в λ раз больше — поле по закону Кулона то же самое. Поэтому любая фигура, подобная первой относительно точки наблюдения, создаёт в этой точке то же поле E_0. Дальше каждую фигуру либо разрезаем на такие части, либо дополняем до одной и той же пластины двумя способами (приём «вычитания»). Направления полей даёт симметрия, а складываем векторы — принцип суперпозиции.

Обозначения. σ — поверхностная плотность заряда (одна на все фигуры), $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$; «фигура типа 1» — квадрат $2b \times 2b$ без углового квадрата $b \times b$ при наблюдении из вершины вырезанного угла (рис. 1 при $a \to b$).

1. Подобные площадки. Возьмём малую площадку dS_1 на расстоянии r от точки O и площадку dS_2, полученную из неё растяжением в λ раз с центром в O. Её площадь $dS_2 = \lambda^2 dS_1$, расстояние λr, направление на неё то же. Закон Кулона для малой площадки (точечный заряд $\sigma\, dS$):

$$dE_2 = \frac{k\sigma\, dS_2}{(\lambda r)^2} = \frac{k\sigma\lambda^2 dS_1}{\lambda^2 r^2} = dE_1,$$

и векторы $d\vec{E}_1$ и $d\vec{E}_2$ направлены одинаково. Разобьём две подобные (с центром подобия O) пластины на пары таких площадок и сложим поля по принципу суперпозиции: *подобные относительно точки наблюдения пластины с одинаковой σ создают в ней одинаковое поле.*



Площадка 2 подобна площадке 1 с центром O и коэффициентом λ: заряд больше в λ^2 раз, расстояние — в λ раз, поле в O то же.

Пункт 1. Фигура рис. 2 подобна фигуре рис. 1 с коэффициентом λ, и O' — образ точки O. По доказанному поля равны:

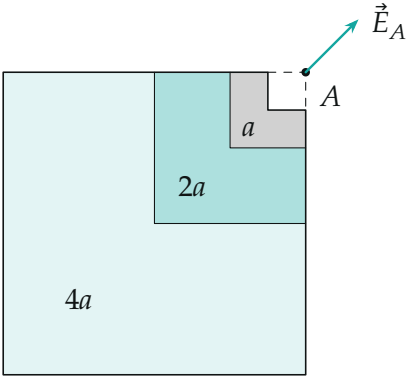
$$E'/E_0 = 1.$$

Размер фигуры в ответ не входит — только форма и положение точки.

Пункт 2. Разрежем фигуру рис. 3 на три части, как на рисунке ниже: квадрат $8a$ без квадрата $4a$, квадрат $4a$ без квадрата $2a$, квадрат $2a$ без квадрата a. Все три — фигуры типа 1 с вершиной вырезанного угла в A ($b = 4a$, $2a$ и a), каждая создаёт в A поле E_0. Все три поля направлены одинаково: каждая часть симметрична относительно диагонали квадрата, проходящей через A, поэтому её поле направлено вдоль диагонали, от фигуры (заряд положительный). Принцип суперпозиции:

$$E_A = 3E_0,$$

вектор $\vec{E}_A$ направлен вдоль оси симметрии фигуры (диагонали квадрата) от фигуры — вверх и вправо на рис. 3.



Фигура рис. 3 — три фигуры типа 1 с $b = 4a$, $2a$, a (подписаны их b); каждая даёт в A поле E_0 вдоль диагонали.

Пункт 3. Четверть кольца на фигуры типа 1 не режется, поэтому дополним её до вспомогательной пластины P — квадрата $2a$ с вершиной в B, из которого вырезана четверть круга радиуса a с центром B. Пластину P можно составить двумя способами (рисунок ниже):

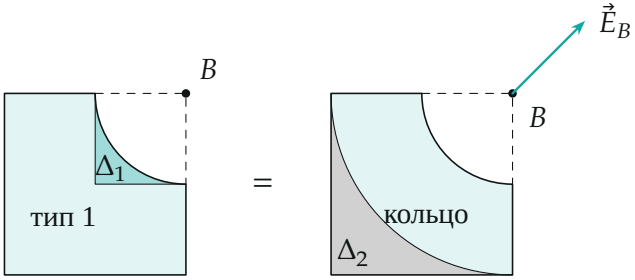
$$P = \underbrace{(\text{фигура типа 1}, b = a)}_{E_0} + \Delta_1, \qquad P = \underbrace{(\text{четверть кольца})}_{E_B} + \Delta_2,$$

где Δ_1 — квадрат a без четверти круга радиуса a, Δ_2 — квадрат $2a$ без четверти круга радиуса $2a$. Области Δ_2 и Δ_1 подобны с центром B и

коэффициентом 2, поэтому их поля в B равны: $\vec{E}_{\Delta_1} = \vec{E}_{\Delta_2}$. Все поля направлены вдоль биссектрисы прямого угла при B (у каждой части — эта ось симметрии), так что по принципу суперпозиции

$$\vec{E}_P = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\Delta_1} = \vec{E}_B + \vec{E}_{\Delta_2} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_B = \vec{E}_0, \qquad E_B = E_0,$$

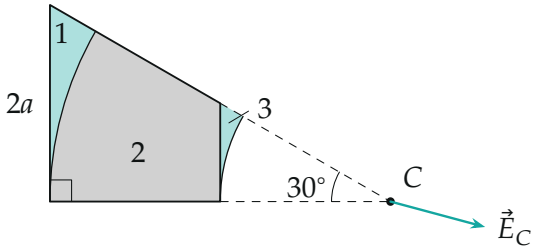
направлено вдоль оси симметрии четверти кольца от неё — вверх и вправо на рис. 4.



Пластина P двумя способами: слева — фигура типа 1 и Δ_1, справа — четверть кольца и Δ_2. Область Δ_2 подобна Δ_1 с центром B и коэффициентом 2.

Пункт 4. *Геометрия.* Боковая сторона трапеции (между основаниями $2a$ и a) наклонена к основанию $2a$ на $60°$, значит, высота трапеции $(2a - a)\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}\,a$, а прямая боковой стороны пересекает прямую нижней стороны в точке C под углом $30°$. Из подобия треугольников C удалена от основания a на $\sqrt{3}\,a$, а от основания $2a$ — на $2\sqrt{3}\,a$.

Подобие. Повторим приём пункта 3 (рисунок ниже). Дуги радиусов $\sqrt{3}\,a$ и $2\sqrt{3}\,a$ с центром C отсекают от угла $30°$ при вершине C сектор кольца. Трапеция = область 1 + область 2, сектор кольца = область 3 + область 2. Область 1 (угол трапеции за большой дугой) подобна области 3 (за малой дугой у основания a) с центром C и коэффициентом 2 — их поля в C равны. Значит, трапеция создаёт в C то же поле, что сектор кольца с углом $30°$ и радиусами $\sqrt{3}\,a$, $2\sqrt{3}\,a$.



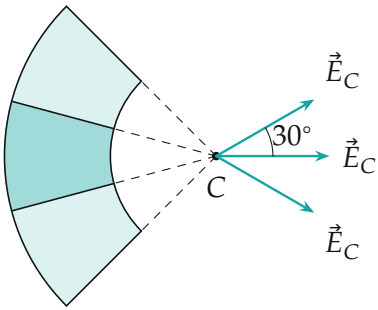
Трапеция = 1 + 2, сектор кольца = 3 + 2; области 1 и 3 подобны с центром C (коэффициент 2). Поле трапеции в C равно полю сектора и направлено по его оси симметрии.

Направление. Сектор симметричен относительно биссектрисы угла 30° при C; значит, $\vec{E}_C$ направлено по этой биссектрисе от фигуры: под углом 15° к продолжению нижней стороны трапеции за точку C, в сторону, противоположную трапеции.

Модуль. Три таких сектора (по 30°, радиусы с отношением 2) складываются в четверть кольца — она подобна фигуре пункта 3 и даёт в центре поле E_0. Поле каждого сектора равно E_C и направлено по его биссектрисе; биссектрисы крайних секторов повёрнуты на $\pm 30°$ относительно средней. Принцип суперпозиции в проекции на ось симметрии четверти кольца (поперечные проекции крайних секторов взаимно уничтожаются):

$$E_0 = E_C + 2E_C \cos 30° = E_C(1 + \sqrt{3}),$$

$$E_C = \frac{E_0}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} E_0 \approx 0{,}37\, E_0.$$



Четверть кольца из трёх секторов по 30°: каждый даёт в центре поле E_C по своей биссектрисе, сумма равна E_0.

Обратите внимание. Поля частей складываются как векторы. В пунктах 2 и 3 все части симметричны относительно одной прямой, и векторы просто коллинеарны; в пункте 4 этого нет — крайние сектора дают поля под углом 30°, отсюда множитель $1 + 2\cos 30°$, а не 3.

Проверка. Размерность: всё выражено через E_0, безразмерные отношения. Численное интегрирование закона Кулона по фигурам (сетка до 4000×4000) даёт $E_0 = \sqrt{2}\ln 2 \cdot k\sigma \approx 0{,}980\, k\sigma$, $E_A/E_0 = 3{,}000$, $E_B/E_0 = 1{,}000$, $E_C/E_0 = 0{,}3660$ при $1/(\sqrt{3}+1) = 0{,}3660$, направление $\vec{E}_C$ — ровно 15° ниже продолжения нижней стороны. Смысл: в плоскости поле равномерно заряженной фигуры зависит только от её формы и положения точки наблюдения, но не от масштаба — это и делает задачу решаемой без интегралов.

Ответ. 1) $E'/E_0 = 1$; 2) $E_A = 3E_0$, вдоль оси симметрии фигуры от неё (вверх и вправо на рис. 3); 3) $E_B = E_0$, вдоль оси симметрии четверти кольца от неё (вверх и вправо на рис. 4); 4) $E_C = \dfrac{E_0}{\sqrt{3}+1} \approx 0{,}37\, E_0$, вдоль биссектрисы угла C (30°) в сторону от трапеции, т. е. под углом 15° к продолжению нижней стороны трапеции за точку C.