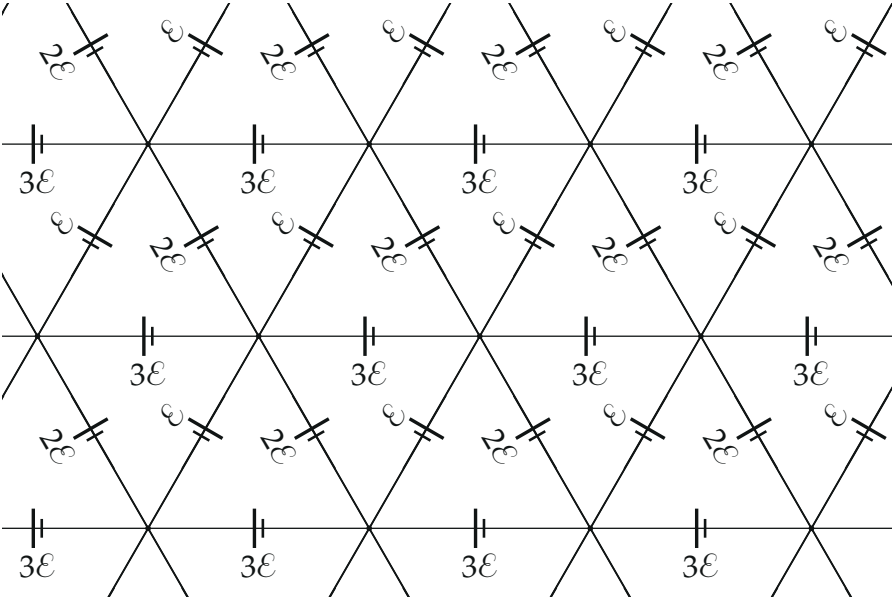
Вай кодамо!

Задача 5. [ВсОШ 2024/25, заключительный этап, 10 класс, теоретический тур, задача 5] «Вай кодамо!».

В бесконечной электрической цепи, фрагмент схемы которой представлен на рисунке, каждая треугольная ячейка содержит три источника с одинаковыми внутренними сопротивлениями r, но разными ЭДС ($\mathcal{E}$, $2\mathcal{E}$ и $3\mathcal{E}$), причём полярность подключения источников с одной и той же ЭДС периодически меняется (см. рис.).



1. Чему равны разности потенциалов $(\varphi_+ - \varphi_-)$ между плюсом и минусом каждого источника в данной цепи?
2. Определите силы токов через все источники в данной цепи.
3. Какое сопротивление R_1 покажет омметр при подключении к плюсу и минусу источника с ЭДС $\mathcal{E}$, находящегося в данной цепи? Какие сопротивления R_2 и R_3 покажет прибор, если сделать то же самое с источниками $2\mathcal{E}$ и $3\mathcal{E}$ соответственно? Будут ли зависеть показания омметра от полярности его подключения?

4. Один из источников с ЭДС $2\mathcal{E}$ заменили другим источником с ЭДС, равной $\mathcal{E}$, и внутренним сопротивлением $r/2$. Какова в этом случае будет сила тока I, текущего через заменённый источник?

Величины $\mathcal{E}$ и r считайте известными. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Сетка — треугольная решётка, каждое ребро которой — источник с сопротивлением r. Вдоль каждой прямой решётки стоят источники одного типа ($3\mathcal{E}$ — горизонтальные, $\mathcal{E}$ и $2\mathcal{E}$ — наклонные), и на рисунке видно: вдоль одной прямой все они повёрнуты «плюсом» в одну сторону. Главная идея — угадать распределение потенциалов (все узлы при одном потенциале) и проверить, что оно удовлетворяет законам Кирхгофа; по теореме единственности оно и есть ответ. Второй способ — симметрия схемы и метод наложения (так рассуждают организаторы). Пункты 3 и 4 — класс «эквивалентный источник»: всю остальную сетку заменяем одним источником, сопротивление которого находим приёмом «ток втекает в узел и растекается на бесконечность».

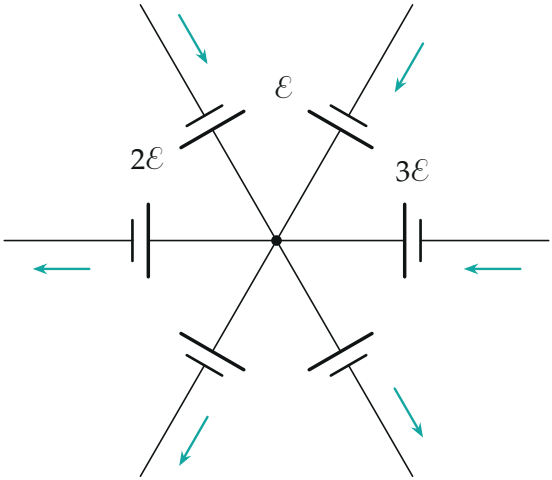
Обозначения. I_1, I_2, I_3 — токи через источники $\mathcal{E}$, $2\mathcal{E}$, $3\mathcal{E}$ (положительные — по направлению ЭДС, т. е. внутри источника от «минуса» к «плюсу»). Закон Ома для участка с источником:

$$\varphi_+ - \varphi_- + \mathcal{E}_k = I_k r.$$

Пункт 1. Разности потенциалов. Предположим, что все узлы имеют один потенциал. Тогда по закону Ома в каждом источнике течёт ток $I_k = \mathcal{E}_k/r$ по направлению его ЭДС. Проверим первый закон Кирхгофа для произвольного узла (рисунок ниже). Через узел проходят три прямые решётки, на каждой — два источника одного типа, повёрнутые одинаково. Ток $\mathcal{E}_k/r$ по одной из этих ветвей втекает в узел, а такой же по другой — вытекает. Сумма токов в узле равна нулю для всех узлов, а второй закон Кирхгофа выполнен автоматически (потенциалы заданы). Решение уравнений Кирхгофа единственно, значит,

$$\varphi_+ - \varphi_- = 0$$

для каждого источника.



Узел решётки: на каждой прямой два одинаково повёрнутых источника; бирюзовые стрелки — токи при равных потенциалах узлов: сколько втекает по прямой, столько и вытекает.

Второй способ (симметрия). Метод наложения: оставим только источники $\mathcal{E}$, остальные ЭДС «выключим» (их сопротивления r останутся). Сдвиг на ячейку вдоль прямой источников $\mathcal{E}$ переводит схему в себя — разность потенциалов на всех таких источниках одна, $\Delta\varphi$. Поворот схемы на 180° вокруг середины любого ребра другого направления тоже переводит схему в себя, но меняет местами «плюс» и «минус» каждого источника $\mathcal{E}$: $\Delta\varphi = -\Delta\varphi = 0$. То же для соседних узлов в других направлениях и для систем $2\mathcal{E}$, $3\mathcal{E}$; сумма наложений — всюду нули.

Пункт 2. Токи. Из закона Ома при $\varphi_+ - \varphi_- = 0$:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r}, \qquad I_2 = \frac{2\mathcal{E}}{r}, \qquad I_3 = \frac{3\mathcal{E}}{r},$$

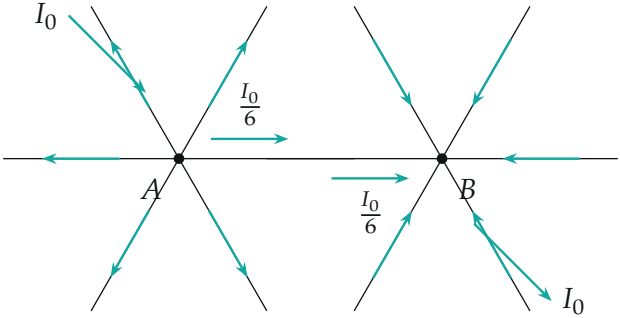
внутри каждого источника — от «минуса» к «плюсу». Каждый источник работает как замкнутый накоротко: соседние источники не мешают и не помогают.

Пункт 3. Омметр. Сетка, подключённая к двум соседним узлам, — эквивалентный источник (теорема об эквивалентном источнике). Его ЭДС равна напряжению холостого хода — разности потенциалов между

узлами, т. е. нулю (пункт 1). Значит, сетка ведёт себя как резистор $r_{\text{экв}}$ — сопротивление между соседними узлами при «выключенных» ЭДС, и омметр покажет $r_{\text{экв}}$ при любой полярности (ЭДС нет — направление тока роли не играет).

Найдём $r_{\text{экв}}$ методом наложения. Опыт 1: в узел A втекает ток I_0 и растекается на бесконечность. У узла шесть одинаковых ветвей, по симметрии по каждой течёт $I_0/6$ — в том числе по ребру AB от A к B. Опыт 2: из соседнего узла B вытекает ток I_0, приходящий из бесконечности; по ребру AB к B течёт снова $I_0/6$. Сумма опытов: ток I_0 входит в A и выходит из B, а по ребру AB течёт $I_0/3$. Напряжение $U_{AB} = \frac{I_0}{3}r$:

$$r_{\text{экв}} = \frac{U_{AB}}{I_0} = \frac{r}{3}, \qquad R_1 = R_2 = R_3 = \frac{r}{3}.$$



Наложение двух опытов: I_0 втекает в A (по $I_0/6$ в каждую ветвь) и вытекает из B (по $I_0/6$ из каждой ветви). По ребру AB течёт $I_0/3$.

Пункт 4. Замена источника. Представим сетку, видимую с выводов источника $2\mathcal{E}$, как этот источник $(2\mathcal{E}, r)$, параллельно которому подключена «остальная сетка» — эквивалентный источник $(\mathcal{E}^*, r^*)$. Параметры $\mathcal{E}^*$ и r^* найдём из уже известного.

Сопротивление. Параллельное соединение r и r^* даёт $r_{\text{экв}} = r/3$:

$$\frac{3}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^*} \;\Rightarrow\; r^* = \frac{r}{2}.$$

ЭДС. Ток через источник $2\mathcal{E}$ в исходной сетке — $2\mathcal{E}/r$ (пункт 2), он же течёт по замкнутому контуру «источник + остальная сетка». Закон Ома для полной цепи этого контура (ЭДС $\mathcal{E}^*$ действует в ту же сторону по контуру, иначе ток был бы меньше):

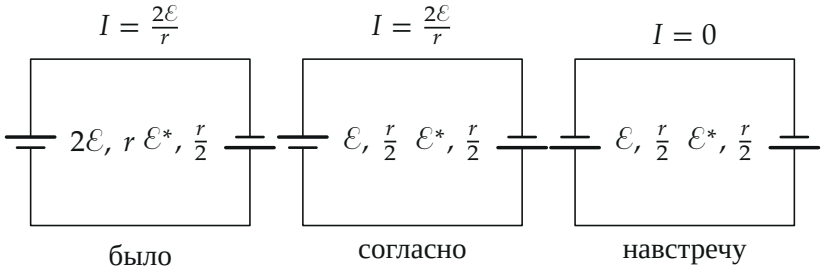
$$\frac{2\mathcal{E}+\mathcal{E}^*}{r+r/2}=\frac{2\mathcal{E}}{r}\ \Rightarrow\ \mathcal{E}^*=\mathcal{E}.$$

Проверка через напряжение: на выводах $\varphi_+-\varphi_-=-2\mathcal{E}+\frac{2\mathcal{E}}{r}r=0$ — как и в пункте 1.

Новый источник ($\mathcal{E}$, $r/2$) можно впаять двумя способами. Закон Ома для полной цепи контура «новый источник + остальная сетка» (сопротивление $r/2+r/2=r$):

$$\text{ЭДС согласно: } I=\frac{\mathcal{E}+\mathcal{E}}{r}=\frac{2\mathcal{E}}{r};\qquad \text{ЭДС навстречу: } I=\frac{\mathcal{E}-\mathcal{E}}{r}=0.$$

Остальная сетка при замене не меняется — значит, её $\mathcal{E}^*$ и r^* те же.



Контур «источник + остальная сетка» ($\mathcal{E}^*=\mathcal{E}$, $r^*=r/2$): слева — исходный источник $2\mathcal{E}$, ток $2\mathcal{E}/r$; справа — новый источник $\mathcal{E}$, $r/2$ при двух полярностях.

Обратите внимание. «Полярность периодически меняется» — от ряда к ряду, но вдоль одной прямой решётки источники повёрнуты одинаково: именно поэтому ток, втекающий в узел по прямой, тут же вытекает по ней дальше, и все узлы оказываются при одном потенциале.

Проверка. Размерности: $\mathcal{E}/r$ — ампер, $r/3$ — ом. Предел: если все ЭДС равны нулю, токов нет, и сопротивление между соседними узлами

треугольной решётки $r/3 = 2r/z$ при числе ветвей $z = 6$ (у квадратной решётки так же получается $r/2$). Пункт 4 вторым путём: в исходной схеме новый источник с той же полярностью, что и $2\mathcal{E}$, при $\mathcal{E} = \mathcal{E}^*$ даёт ток $2\mathcal{E}/r$ — столько же, сколько было; встречный — уравновешивает остальную сетку, ток нуль. Смысл: сетка, в которой ток по каждой прямой «проходит насквозь», не создаёт разностей потенциалов, и каждый источник замкнут сам на себя.

Ответ. 1) $\varphi_+ - \varphi_- = 0$; 2) $I_1 = \mathcal{E}/r$, $I_2 = 2\mathcal{E}/r$, $I_3 = 3\mathcal{E}/r$; 3) $R_1 = R_2 = R_3 = r/3$, от полярности не зависят; 4) $I = 2\mathcal{E}/r$ или $I = 0$ в зависимости от полярности подключения нового источника.