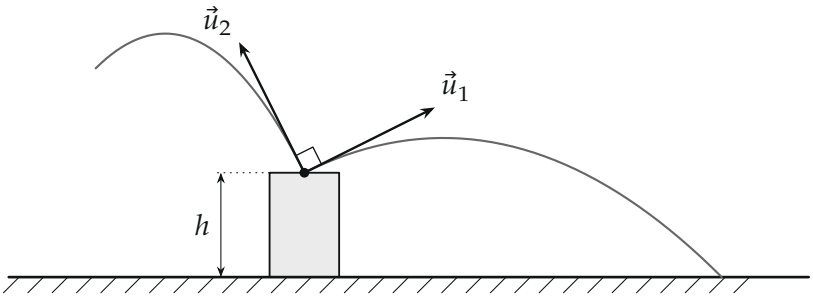
Два камня

Задача 1. [ВсОШ 2024/25, 11 класс, задача 1] С вершины башни высоты h с одинаковыми скоростями v, направленными перпендикулярно одна к другой, под разными углами к горизонту одновременно брошены два камня так, что их движение происходит в одной вертикальной плоскости. Через некоторое время после броска, как раз непосредственно перед падением одного камня на землю, оказалось, что векторы скоростей камней направлены под одинаковыми углами к горизонту.

Определите величину этого угла φ и расстояние между камнями l в этот момент времени.

Известно, что в начальный момент времени оба камня удаляются от поверхности земли, а непосредственно перед падением одного камня на землю другой камень тоже приближается к поверхности земли. Башня расположена на горизонтальной поверхности. Ускорение свободного падения равно g. Сопротивление воздуха не учитывайте.



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): башня, начальные скорости камней и их траектории. Построено для $v = 10$ м/с, $h = 3$ м, $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Оба камня летят в одном поле тяжести, поэтому скорость каждого из них за время t получает одну и ту же добавку $\vec{g}\,t$, направленную вниз. Значит, *разность* скоростей камней не меняется: для наблюдателя, падающего вместе с камнями, они разлетаются равномерно. Главная идея задачи — векторные треугольники скоростей с общим началом: у обоих камней одна из сторон одна и та же (gt, вертикально), и равенство углов с горизонтом почти сразу даёт ответ.

Обозначения. Ось x — по горизонтали, ось y — вертикально вверх от земли. Камень 1 — тот, что падает первым; $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ — начальные скорости камней ($|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = v$, $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$), $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ — их скорости в момент t, когда камень 1 вот-вот упадёт. Угол α — угол между вертикалью и каждой из скоростей $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$; тогда $\varphi = 90° - \alpha$.

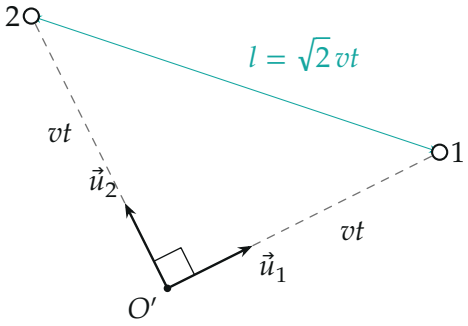
1. Относительное движение. Ускорение каждого камня равно $\vec{g}$, поэтому

$$\vec{w}_1 = \vec{u}_1 + \vec{g}\,t, \qquad \vec{w}_2 = \vec{u}_2 + \vec{g}\,t \quad \Rightarrow \quad \vec{w}_1 - \vec{w}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2.$$

Скорости перпендикулярны и равны по модулю, поэтому $|\vec{u}_1 - \vec{u}_2| = \sqrt{2}\,v$. Камни вылетели из одной точки, и (в системе отсчёта, падающей вместе с ними, каждый идёт равномерно и прямолинейно) за время t они разошлись на расстояние

$$l = \sqrt{2}\,v\,t.$$

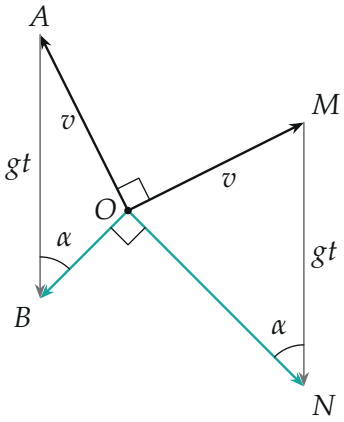
Остаётся найти время t до падения.



Система отсчёта, падающая вместе с камнями: камни проходят пути vt по перпендикулярным направлениям, расстояние между ними — гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника.

2. Векторные треугольники скоростей. Отложим от общей точки O векторы $\vec{u}_2 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{u}_1 = \overrightarrow{OM}$ и $\vec{w}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w}_1 = \overrightarrow{ON}$. Равенство $\vec{w}_i = \vec{u}_i + \vec{g}\,t$ означает, что точка B лежит на gt ниже точки A, а точка N — на gt ниже точки M. Получились два треугольника AOB и MON:

у обоих стороны $OA = OM = v$ и $AB = MN = gt$, причём AB и MN вертикальны. Углы при вершинах B и N равны α (вертикаль и скорость).



Векторные треугольники при $v = 10$ м/с, $h = 3$ м, $g = 10$ м/с^2 (время $t \approx 1{,}34$ с). Масштаб: 1 см ↔ 3,85 м/с.

Запишем теорему синусов в каждом из треугольников (напротив стороны v лежит угол α):

$$\frac{v}{\sin\alpha} = \frac{gt}{\sin\angle AOB} = \frac{gt}{\sin\angle MON} \quad \Rightarrow \quad \sin\angle AOB = \sin\angle MON.$$

Значит, либо $\angle AOB = \angle MON$, либо $\angle AOB + \angle MON = 180°$. Первый случай даёт равные треугольники: тогда и начальные скорости составляли бы с вертикалью одинаковые углы, то есть камни были бы брошены под одинаковыми углами к горизонту, а по условию углы разные. Остаётся

$$\angle AOB + \angle MON = 180°.$$

Вокруг точки O лучи идут в порядке OA, OM, ON, OB (рисунок), угол AOM прямой, поэтому

$$\angle NOB = 360° - 90° - 180° = 90°.$$

Скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ перпендикулярны и составляют с вертикалью один и тот же угол, то есть расположены симметрично относительно вертика-

ли, и $\alpha = 90^\circ/2 = 45^\circ$. Угол с горизонтом

$$\varphi = 90^\circ - \alpha = 45^\circ.$$

Обратите внимание: равные углы с горизонтом могли бы означать и *параллельные* скорости, но этот случай невозможен. Запишем $\vec{u}_1 = v(\cos\gamma, \sin\gamma)$, $\vec{u}_2 = v(-\sin\gamma, \cos\gamma)$, $0 < \gamma < 90^\circ$ (оба камня сначала летят вверх). Условие $\vec{w}_1 \parallel \vec{w}_2$ даёт $gt(\cos\gamma + \sin\gamma) = v$. Но в момент падения оба камня летят вниз: $v\sin\gamma < gt$ и $v\cos\gamma < gt$. Умножив первое неравенство на $\cos\gamma + \sin\gamma$, получим $\sin\gamma\cos\gamma + \sin^2\gamma < 1$, то есть $\operatorname{tg}\gamma < 1$; из второго так же $\operatorname{tg}\gamma > 1$. Противоречие.

3. Скорость упавшего камня. Для камня 1 запишем закон сохранения механической энергии между броском и моментом перед падением (работает только сила тяжести; m — масса камня, высота в конце равна нулю):

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mv_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = |\vec{w}_1| = \sqrt{v^2 + 2gh}.$$

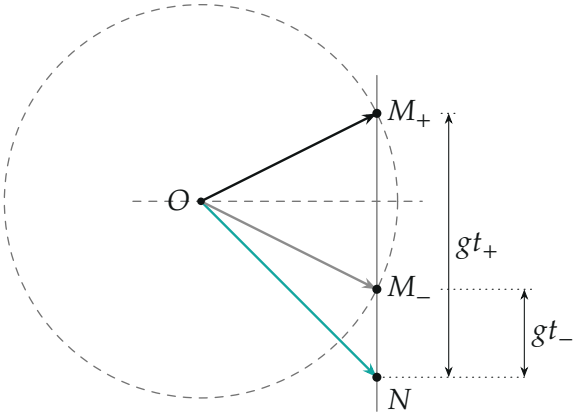
4. Время полёта. Рассмотрим треугольник MON: $OM = v$, $MN = gt$, $NO = v_1$, угол при вершине N равен $\alpha = 45^\circ$. Теорема косинусов для стороны OM:

$$v^2 = v_1^2 + (gt)^2 - 2\,v_1\,gt\cos 45^\circ \quad \Rightarrow \quad (gt)^2 - \sqrt{2}\,v_1\,gt + (v_1^2 - v^2) = 0.$$

Так как $v_1^2 - v^2 = 2gh$, корни этого квадратного уравнения

$$gt = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - 4gh}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{v^2 + 2gh} \pm \sqrt{v^2 - 2gh}}{\sqrt{2}}.$$

Два корня — это две точки M_+ и M_- на вертикали через N, лежащие на расстоянии v от O (окружность радиуса v). По условию камень 1 вначале летит вверх, значит, точка M лежит выше горизонтали через O: нужна точка M_+, корень со знаком «+». Корень со знаком «−» отвечает броску вниз.



Выбор корня при $v = 10$ м/с, $h = 3$ м, $g = 10$ м/с^2: точка M_+ выше горизонтали (бросок вверх), M_- ниже (бросок вниз, не подходит).

Тот же результат — вторым способом, через проекции. Горизонтальная проекция скорости камня 1 не меняется, а в конце скорость направлена под 45° вниз: $w_{1x} = u_{1x}$, $w_{1y} = -u_{1x}$. Тогда $v_1^2 = 2u_{1x}^2$ и $u_{1x} = v_1/\sqrt{2}$, откуда $u_{1y} = \sqrt{v^2 - u_{1x}^2} = \sqrt{(v^2 - 2gh)/2} > 0$ (знак задан условием: бросок вверх). Из $w_{1y} = u_{1y} - gt = -u_{1x}$ получаем

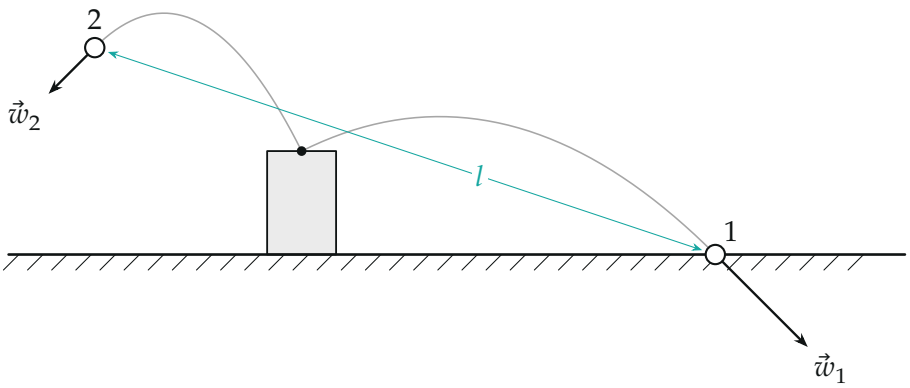
$$gt = u_{1x} + u_{1y} = \frac{\sqrt{v^2 + 2gh} + \sqrt{v^2 - 2gh}}{\sqrt{2}},$$

корень со знаком «+» выбран сразу.

5. Расстояние между камнями. Подставим время в $l = \sqrt{2}\,v\,t$ из пункта 1:

$$l = \sqrt{2}\,v \cdot \frac{\sqrt{v^2 + 2gh} + \sqrt{v^2 - 2gh}}{\sqrt{2}\,g} = \frac{v}{g}\left(\sqrt{v^2 + 2gh} + \sqrt{v^2 - 2gh}\right).$$

Решение существует при $v^2 \geq 2gh$.



Положение камней в искомый момент ($v = 10$ м/с, $h = 3$ м, $g = 10$ м/с^2): камень 1 у земли в точке $x = 12$ м, камень 2 — в точке $x = -6$ м на высоте 6 м; $l = \sqrt{360} \approx 19$ м.

Проверка. Размерность: v^2/g — метры, и φ безразмерен. Предел $h \to 0$: $l \to 2v^2/g$; это согласуется с прямым расчётом: камень 1 брошен с земли под 45° со скоростью v, летит время $\sqrt{2}\,v/g$, и $l = \sqrt{2}\,v \cdot \sqrt{2}\,v/g$. Второй способ: энергия второго камня даёт $|\vec{w}_2|^2 = v^2 - 2gh$, то есть $v^2 + 2g(h - y_2) = v^2 - 2gh$, откуда $y_2 = 2h$: в момент падения второй камень на высоте $2h$. Для $v = 10$, $h = 3$, $g = 10$ уравнения движения дают $t = \sqrt{1{,}8}$ с, $\vec{w}_1 = (8{,}94;\ -8{,}94)$, $\vec{w}_2 = (-4{,}47;\ -4{,}47)$ м/с, положения $(12;\ 0)$ и $(-6;\ 6)$ м — как на рисунке.

Смысл: «равные углы» здесь означают симметрию скоростей относительно вертикали, а симметрия при перпендикулярных скоростях сразу даёт 45° независимо от v и h.

Ответ. $\varphi = 45°$; $\quad l = \dfrac{v}{g}\left(\sqrt{v^2 + 2gh} + \sqrt{v^2 - 2gh}\right)$.