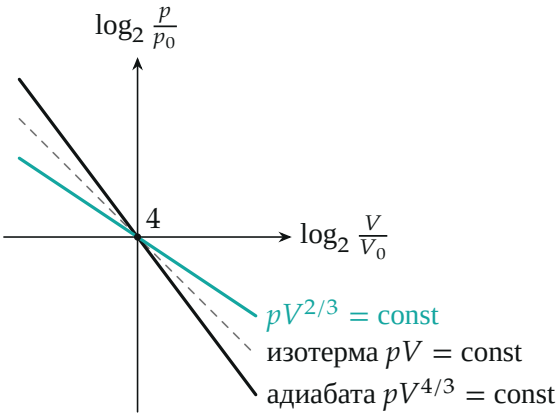
Цикл, как цикл

Задача 2. [ВсОШ 2024/25, 11 класс, задача 2] В архиве лорда Кельвина нашли записки о цикле, состоящем из четырех последовательно совершаемых классическим идеальным многоатомным газом квазистатических процессов $1-2$, $2-3$, $3-4$ и $4-1$. График цикла оказался утерян, но стало известно, что в процессах $1-2$ и $3-4$ на любом малом участке изменение внутренней энергии было точно равно работе газа, а в процессах $2-3$ и $4-1$ на любом малом участке изменение внутренней энергии было точно равно работе внешних сил над газом.

Температуры трёх точек цикла были заданы: $T_1 = T_3 = 2T_0$, $T_4 = T_0$. В точке 4 давление и объем равны соответственно $p_4 = p_0$, $V_4 = V_0$.

1. Чему была равна температура газа T_2 в точке 2?
2. Восстановите график цикла в координатах $\log_2 \dfrac{p}{p_0}$ от $\log_2 \dfrac{V}{V_0}$.
3. Определите КПД цикла.



Поясняющий рисунок (в условии рисунка нет): три семейства линий в координатах $\log_2 V$, $\log_2 p$ *через точку* 4. *Адиабата круче изотермы, процесс с* $\delta Q = 2\,dU$ *положе изотермы.*

▲ **Решение. Что происходит.** На участках $2-3$ и $4-1$ внутренняя энергия меняется на работу внешних сил, то есть $dU = -\delta A$ (работа газа),

и $\delta Q = dU + \delta A = 0$: это адиабаты. На участках $1-2$ и $3-4$ $dU = \delta A$, поэтому $\delta Q = 2\,dU$: теплоёмкость постоянна и равна $2C_V$ (политропа). Для идеального газа уравнения всех четырёх процессов приводятся к виду $TV^n = \text{const}$ с $n = \pm\frac{1}{3}$, а в логарифмических координатах это прямые линии. Главная идея: начертить цикл сначала в удобных координатах $\log_2 V$, $\log_2 T$ (там он оказывается симметричным ромбом), а затем перейти к давлению по уравнению состояния; КПД найти по теплоте, которую газ реально получает и отдаёт.

Обозначения. ν — число молей; для многоатомного газа $U = 3\nu RT$, $C_V = 3\nu R$ (теплоёмкость всего газа при постоянном объёме), $pV = \nu RT$. δA — работа газа на малом участке, δQ — теплота, полученная газом. Для краткости $x = \log_2 \dfrac{V}{V_0}$, $y = \log_2 \dfrac{p}{p_0}$, $w = \log_2 \dfrac{T}{T_0}$.

Обратите внимание: в условии для участков $2-3$ и $4-1$ работа *внешних сил*, а для $1-2$ и $3-4$ работа *газа*; эти работы отличаются знаком, и именно поэтому первая пара процессов адиабатная, а вторая нет.

Пункт 1. Температура T_2.

1. Уравнения процессов. Рассмотрим малый участок процесса, на котором T и V меняются на dT и dV. Первое начало термодинамики: $\delta Q = dU + \delta A$, где $dU = 3\nu R\,dT$ и $\delta A = p\,dV = \nu RT\dfrac{dV}{V}$. Участки $2-3$ и $4-1$ ($\delta Q = 0$):

$$3\nu R\,dT = -\nu RT\frac{dV}{V} \quad\Rightarrow\quad 3\frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V} \quad\Rightarrow\quad TV^{1/3} = \text{const}.$$

Участки $1-2$ и $3-4$ ($dU = \delta A$):

$$3\nu R\,dT = \nu RT\frac{dV}{V} \quad\Rightarrow\quad 3\frac{dT}{T} = \frac{dV}{V} \quad\Rightarrow\quad TV^{-1/3} = \text{const}.$$

Здесь малые изменения просуммированы от начала до конца участка: $3\ln T = \mp\ln V + \text{const}$. Формулы верны для квазистатических процессов с постоянным числом молей.

2. Объёмы в точках 1 и 3. Состояния 4 и 1 лежат на одной адиабате, $T_1V_1^{1/3} = T_4V_4^{1/3}$; при $T_1 = 2T_0$, $T_4 = T_0$, $V_4 = V_0$ получаем $V_1^{1/3} =$

$V_0^{1/3}/2$, то есть $V_1 = V_0/8$. Состояния 3 и 4 — на одной политропе, $T_3V_3^{-1/3} = T_4V_4^{-1/3}$, откуда $V_3^{-1/3} = V_0^{-1/3}/2$ и $V_3 = 8V_0$.

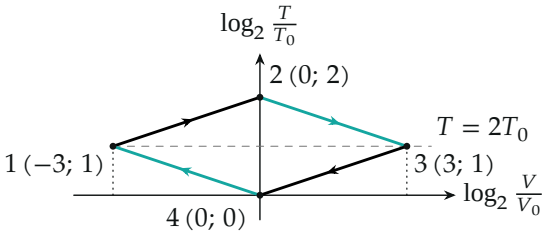
3. Точка 2. Она лежит и на политропе, идущей из точки 1, и на адиабате, идущей из точки 3:

$$T_1V_1^{-1/3} = T_2V_2^{-1/3}, \qquad T_3V_3^{1/3} = T_2V_2^{1/3}.$$

Разделим второе уравнение на первое и учтём $T_1 = T_3$: $(V_1V_3)^{1/3} = V_2^{2/3}$, откуда $V_2 = \sqrt{V_1V_3} = V_0$. Из первого уравнения

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/3} = 2T_0 \cdot 2 = 4T_0.$$

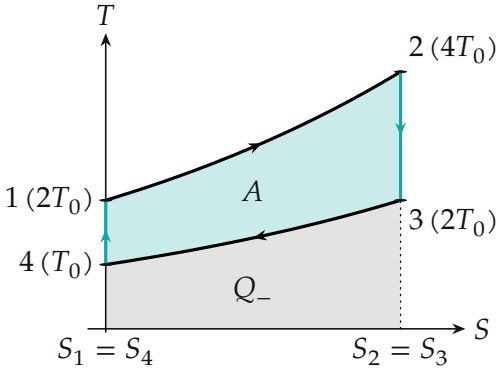
Тот же результат — вторым способом, на графике. В координатах (x, w) уравнения процессов дают прямые: $TV^{1/3} = \text{const}$ — $w = -\frac{1}{3}x + \text{const}$, а $TV^{-1/3} = \text{const}$ — $w = \frac{1}{3}x + \text{const}$. От точки 4 с координатами $(0;\,0)$ идут адиабата влево до уровня $w = 1$ ($T = 2T_0$, точка 1 с $x = -3$) и политропа вправо до того же уровня (точка 3 с $x = 3$). Из точки 1 идёт политропа вверх вправо, из точки 3 — адиабата вверх влево; они пересекаются на оси w: $w_2 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$, то есть $T_2 = 4T_0$. Получился ромб.



Цикл в координатах $\log_2 V, \log_2 T$ *(в скобках — координаты точек). Бирюзовые стороны — адиабаты* ($TV^{1/3} = \text{const}$)*, чёрные — политропы* ($TV^{-1/3} = \text{const}$)*.*

Ещё проще — через энтропию; цикл в координатах T, S изображён на рисунке. На адиабатах $S_2 = S_3$ и $S_1 = S_4$, а на политропах $dS = \dfrac{\delta Q}{T} =$

$2C_V\dfrac{dT}{T}$. Поэтому $S_2 - S_1 = 2C_V \ln\dfrac{T_2}{T_1}$ и $S_3 - S_4 = 2C_V \ln\dfrac{T_3}{T_4}$; левые части равны, значит $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{T_3}{T_4}$ и $T_2 = \dfrac{T_1T_3}{T_4} = 4T_0$.



Цикл в координатах T–S. Адиабаты — вертикальные отрезки, политропы — экспоненты, верхняя вдвое выше нижней при одной и той же S. Серая площадь — отданная теплота Q_-, площадь под верхней кривой — полученная Q_+, бирюзовая — работа $A = Q_+ - Q_-$.

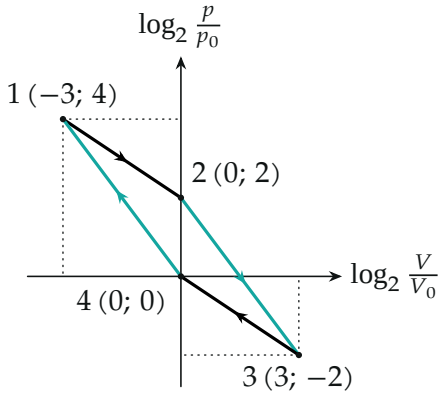
Пункт 2. График цикла в координатах $\log_2 p$, $\log_2 V$.

4. Давления в вершинах. Уравнение состояния в логарифмах даёт $y = w - x$ (так как $p/p_0 = (T/T_0)(V_0/V)$). Вершины (в виде x; y):

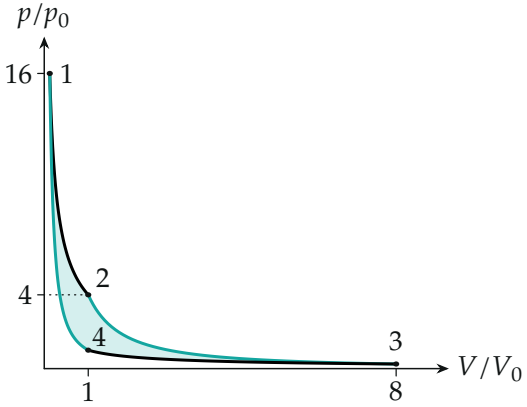
$$1\,(-3;\,4), \qquad 2\,(0;\,2), \qquad 3\,(3;\,-2), \qquad 4\,(0;\,0),$$

то есть $p_1 = 16p_0, p_2 = 4p_0, p_3 = p_0/4, p_4 = p_0$ при объёмах $V_1 = V_0/8$, $V_2 = V_0$, $V_3 = 8V_0$, $V_4 = V_0$.

5. Стороны. Подставим $T = pV/(\nu R)$ в уравнения процессов: адиабата $TV^{1/3} = \text{const}$ принимает вид $pV^{4/3} = \text{const}$, то есть $y = -\frac{4}{3}x + \text{const}$; политропа $TV^{-1/3} = \text{const}$ — $pV^{2/3} = \text{const}$, то есть $y = -\frac{2}{3}x + \text{const}$. Это прямые, а значит, каждый процесс — отрезок между своими вершинами. Две адиабаты ($4-1$ и $2-3$) параллельны, две политропы ($1-2$ и $3-4$) тоже: цикл — параллелограмм. Проверка по вершинам: наклоны отрезков $1-2$, $2-3$, $3-4$, $4-1$ равны $-\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{3}$.



Восстановленный цикл $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ *в координатах* $\log_2 \frac{V}{V_0}$, $\log_2 \frac{p}{p_0}$. *Обход по часовой стрелке: газ совершает положительную работу (тепловая машина). Бирюзовые стороны — адиабаты, чёрные — политропы.*



Тот же цикл в обычных координатах V, p *(кривые построены по уравнениям процессов):* $1 \to 2$ *и* $3 \to 4$ *— политропы* $pV^{2/3} = \text{const}$ *(чёрные),* $2 \to 3$ *и* $4 \to 1$ *— адиабаты* $pV^{4/3} = \text{const}$ *(бирюзовые). Площадь внутри — работа за цикл* $6\nu RT_0$. *В линейном масштабе цикл сжат в узкий «серп» у осей, поэтому график и просят строить в логарифмах.*

Пункт 3. КПД цикла.

6. Теплоты по участкам. На адиабатах $Q = 0$. На участке $1-2$ имеем $\delta Q = 2\,dU$, температура растёт, поэтому на всём участке $\delta Q > 0$, и газ

получает

$$Q_+ = Q_{12} = 2 \cdot 3\nu R\,(T_2 - T_1) = 12\,\nu R T_0.$$

На участке $3-4$ температура падает, $\delta Q < 0$ на всём участке, и газ отдаёт

$$Q_- = |Q_{34}| = 2 \cdot 3\nu R\,(T_3 - T_4) = 6\,\nu R T_0.$$

Обратите внимание: в КПД входит только теплота, реально полученная и реально отданная; здесь знак δQ не меняется внутри участков, поэтому Q_+ и Q_- именно такие.

7. КПД.

$$\eta = \frac{Q_+ - Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Второй способ — через работу. На политропах $A = \Delta U$, на адиабатах $A = -\Delta U$:

$$A_{12} = 3\nu R \cdot 2T_0 = 6\nu R T_0, \qquad A_{23} = -3\nu R(-2T_0) = 6\nu R T_0,$$
$$A_{34} = 3\nu R(-T_0) = -3\nu R T_0, \quad A_{41} = -3\nu R \cdot T_0 = -3\nu R T_0.$$

Работа за цикл $A = 6\nu R T_0$, и $\eta = \dfrac{A}{Q_+} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$.

Третий способ — в координатах T, S (рисунок выше). Вдоль политропы $T = T_{\text{нач}} \exp \dfrac{S - S_{\text{нач}}}{2C_V}$, и при одном и том же значении S верхняя кривая $1-2$ ровно вдвое выше нижней $3-4$ (потому что $T_1 = 2T_4$). Площади под ними — теплоты Q_+ и Q_- — относятся как $2:1$, и снова $\eta = 1 - \frac{1}{2}$.

Проверка. Размерность: η безразмерен, T_2 — в единицах T_0. Предел: между $T_{\max} = 4T_0$ и $T_{\min} = T_0$ идеальная машина имела бы $\eta_K = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; наш цикл даёт $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$, как и должно быть.

Смысл: КПД целиком определён отношением температур $T_1/T_4 = 2$ на двух политропах при одной и той же энтропии, а не формой цикла.

Ответ. 1) $T_2 = 4T_0$; 2) параллелограмм с вершинами $1\,(-3;\,4)$, $2\,(0;\,2)$, $3\,(3;\,-2)$, $4\,(0;\,0)$ (по оси абсцисс $\log_2 \frac{V}{V_0}$, по оси ординат $\log_2 \frac{p}{p_0}$); 3) $\eta = \dfrac{1}{2}$.