Электростатическая левитация

Задача 3. [ВсОШ 2024/25, 11 класс, задача 3] Вертикальный полубесконечный сплошной однородный диэлектрический цилиндр радиуса R заряжен с постоянной по объёму плотностью заряда ρ. От цилиндра отрезали тонкий диск толщиной d ($d \ll R$), затем прислонили его обратно и отпустили (см. рис. 1). Диск остался неподвижным, причём оказалось, что единственная сила взаимодействия между диском и цилиндром — это сила электростатического отталкивания, равная по модулю

$$F_0 = \frac{4}{3}\frac{\rho^2 R^3 d}{\varepsilon_0}.$$

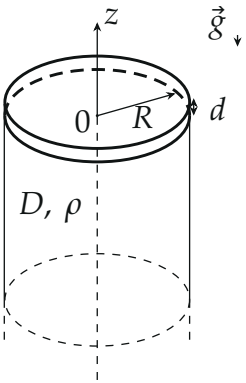


Рис. 1

1. Найдите плотность материала цилиндра D.
2. Диску сообщают такую скорость v_0, направленную вертикально вверх, что он совершает малые колебания, двигаясь поступательно. Определите период этих колебаний.

Далее от диска отрезали небольшое кольцо и удалили его. При этом центр диска остался на оси цилиндра, а новый радиус составляет $R' = R - \Delta R$, где $\Delta R \ll R$.

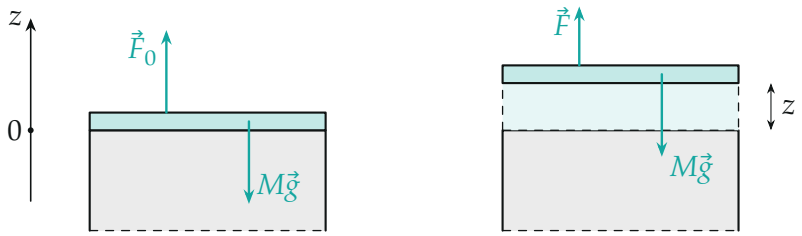
3. Определите положение равновесия диска радиуса R'. В ответе укажите ширину зазора z_0 между диском и цилиндром в положении равновесия.

4. Пусть диск радиуса R' находится в положении равновесия. Определите период малых колебаний диска при его поступательном движении вдоль оси цилиндра после сообщения такой же скорости v_0 направленной вертикально вверх. **Если вы не выполнили пункт 3, считайте $z_0 > 0$ известной величиной.**

Примечания. Ускорение свободного падения равно g. Считайте, что диск может двигаться только поступательно вдоль оси симметрии системы, а основания диска горизонтальны. Все силы трения отсутствуют. Любые возможные соударения абсолютно упругие. Гравитационное взаимодействие диска и цилиндра, магнетизм и электромагнитное излучение не учитывать. Диэлектрик считайте неполяризующимся.

▲ **Решение. Что происходит.** Диск и цилиндр заряжены одинаково, и сила отталкивания F_0 держит диск над цилиндром против силы тяжести. Приподнимем диск на малую высоту z: часть линий поля цилиндра уйдёт в щель наружу, поток через диск и сила отталкивания уменьшатся на величину, пропорциональную z, а вес не изменится. Значит, на диск действует возвращающая сила $-kz$, как у пружины, но «пружина» работает только при $z \geq 0$: цилиндр не пускает диск ниже, и диск упруго отскакивает. Главная идея — найти силу $F(z)$ (теорема Гаусса или заполненный зазор) и разобрать колебания с упругой стенкой. Отрезанное кольцо уменьшает и вес, и отталкивание, но по-разному, поэтому равновесие сдвигается вверх.

Обозначения. Ось z вертикально вверх вдоль оси цилиндра, начало — на торце; z — ширина зазора между диском и цилиндром. $M = \pi R^2 dD$ — масса диска радиуса R, m' — радиуса R'.



Слева: диск на торце, $F_0 = Mg$. Справа: диск поднят на z; зазор мысленно заполнен веществом цилиндра (пунктир, заряд ρ).

Пункт 1. Плотность D.

Диск только прислонён: реакция опоры равна нулю, действуют сила тяжести и сила отталкивания (по симметрии вертикальная). Условие равновесия диска в проекции на ось z: $F_0 - Mg = 0$, то есть

$$\frac{4}{3}\frac{\rho^2 R^3 d}{\varepsilon_0} = \pi R^2 d D g \quad \Rightarrow \quad D = \frac{4}{3\pi}\frac{\rho^2 R}{\varepsilon_0 g}.$$

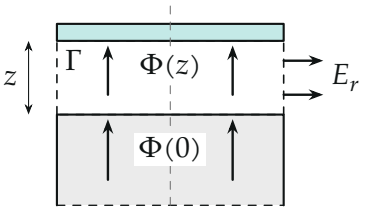
Пункт 2. Период колебаний диска радиуса R.

1. Сила на диск, поднятый на $z \ll R$. Диск тонкий, он — слой с поверхностной плотностью заряда $\sigma = \rho d$. Собственное поле диска равнодействующей на сам диск не даёт, поэтому сила — это действие поля E_z цилиндра:

$$F(z) = \sigma \int E_z \, dS = \rho d \, \Phi(z),$$

где $\Phi(z)$ — поток поля цилиндра через диск на высоте z; при $z = 0$ получаем $\rho d \, \Phi(0) = F_0$.

Способ 1 — теорема Гаусса. Возьмём воображаемый цилиндр Г радиуса R и высоты z, заполняющий зазор. Зарядов в нём нет, значит, суммарный поток через его поверхность равен нулю: через нижнее основание поток $\Phi(0)$ входит, через верхнее $\Phi(z)$ выходит, через боковую поверхность выходит $E_r \cdot 2\pi R z$, где E_r — радиальное поле цилиндра у его края. Отсюда $\Phi(z) = \Phi(0) - 2\pi R z E_r$.



Осевое сечение: воображаемый цилиндр Г в зазоре. Поток $\Phi(0)$ входит снизу, $\Phi(z)$ выходит сверху, остальное уходит через боковую поверхность (E_r).

Радиальное поле найдём так: достроим вторую половину цилиндра выше торца — получится бесконечный цилиндр. По теореме Гаусса для его куска длины l: $E \cdot 2\pi R l = \rho \pi R^2 l / \varepsilon_0$, то есть $E = \rho R / (2\varepsilon_0)$ у боковой

поверхности. Обе половины симметричны относительно плоскости торца и создают в ней одинаковые радиальные поля, поэтому $E_r = E/2 = \rho R/(4\varepsilon_0)$ (тонкая щель шириной $2z \ll R$ добавляет лишь малую поправку). Тогда

$$F(z) = \rho d\,\Phi(z) = F_0 - \rho d \cdot 2\pi R \cdot \frac{\rho R}{4\varepsilon_0} z = F_0 - kz, \qquad k = \frac{\pi \rho^2 R^2 d}{2\varepsilon_0}.$$

Способ 2 — заполненный зазор. Заполним зазор веществом цилиндра: тогда сила на диск снова F_0, значит, реальная сила меньше на отталкивание ΔF диска от добавленного слоя толщиной z и плотностью заряда ρ. Для почти всех точек диска (кроме полоски шириной $\sim z$ у края) слой — бесконечная плоскость с $\sigma' = \rho z$ и полем $E = \rho z/(2\varepsilon_0)$, и $\Delta F = E \cdot \rho \pi R^2 d = kz$ — тот же результат.

2. Уравнение движения. Второй закон Ньютона для диска в проекции на ось z при $0 < z \ll R$ (с учётом $F_0 = Mg$, $M = F_0/g$):

$$M\ddot{z} = F(z) - Mg = -kz \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{M} = \frac{3\pi}{8}\frac{g}{R}.$$

Верно, пока диск не касается цилиндра и колебания малы ($v_0 \ll \omega_0 R$).

3. Период. Начальные условия $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = v_0$ дают $z = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$. При $t = \pi/\omega_0$ диск возвращается к цилиндру со скоростью v_0 вниз, абсолютно упруго отскакивает, и движение повторяется: $T = \dfrac{\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\dfrac{8}{3\pi}\dfrac{R}{g}}$. Обратите внимание: это *половина* периода гармонических колебаний $2\pi/\omega_0$ — вторая половина (при $z < 0$) «срезана» цилиндром; поэтому от v_0 период не зависит.

Пункт 3. Положение равновесия диска радиуса R'.

4. Вес. Масса диска $m' = \pi R'^2 dD$, а $Mg = F_0$, поэтому $m'g = F_0 R'^2/R^2 \approx F_0(1 - 2\Delta R/R)$ и $\Delta(mg) = Mg - m'g = 2F_0\,\Delta R/R$.

5. Электростатическая сила. Сила на диск — сумма сил на его элементы заряда, а поле цилиндра при отрезании кольца не меняется. Поэтому на диск радиуса R' у торца действует сила $F_0 - \Delta F$, где ΔF — сила на отрезанное кольцо; она равна $\Delta F = q_1 E_z$, где $q_1 = 2\pi R\,\Delta R\,d\,\rho$ — за-

ряд кольца, а E_z — поле цилиндра на краю его торца (кольцо тонкое, $d \ll R$).

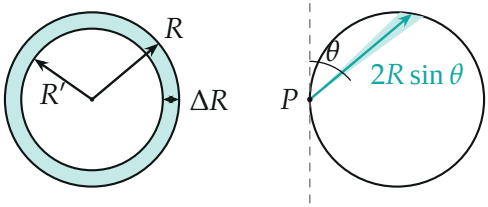
Найдём E_z. Разобьём цилиндр на вертикальные столбики сечением dS: каждый — полубесконечная нить с линейной плотностью $\rho\, dS$. Нить на расстоянии s по горизонтали от точки наблюдения создаёт в ней вертикальную составляющую

$$dE_z = \frac{\rho\, dS}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{u\, du}{(s^2+u^2)^{3/2}} = \frac{\rho\, dS}{4\pi\varepsilon_0\, s} \quad\Rightarrow\quad E_z = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dS}{s}.$$

Точка P лежит на краю торца. Введём полярные координаты (s,θ) с началом в P (θ отсчитываем от касательной к краю, $0 < \theta < \pi$): $dS = s\, ds\, d\theta$, $dS/s = ds\, d\theta$. Луч под углом θ пересекает диск по хорде длиной $2R\sin\theta$, поэтому

$$\int \frac{dS}{s} = \int_0^\pi 2R\sin\theta\, d\theta = 4R, \qquad E_z = \frac{\rho R}{\pi\varepsilon_0}.$$

$$\Delta F = 2\pi R\,\Delta R\, d\rho\cdot\frac{\rho R}{\pi\varepsilon_0} = \frac{2\rho^2R^2d}{\varepsilon_0}\Delta R = \frac{3}{2}\frac{\Delta R}{R}F_0.$$



Слева: диск радиуса R и отрезанное кольцо ширины ΔR (на рисунке ширина преувеличена). Справа: полярные координаты с началом в точке P на краю; длина хорды в направлении θ равна $2R\sin\theta$.

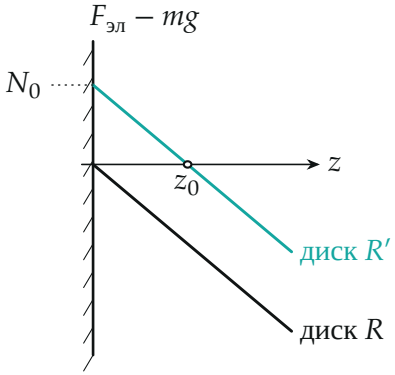
Обратите внимание: у края $E_z = \rho R/(\pi\varepsilon_0)$ в $2/\pi$ раза меньше, чем в центре торца ($\rho R/(2\varepsilon_0)$); подстановка значения для центра завысила бы ΔF.

6. Равновесие. На высоте z сила на диск радиуса R' — та же линейная зависимость (изменение k на долю $\Delta R/R$ не учитываем): $F'(z) = F_0 -$

$\Delta F - kz$. Сумма сил на диск в проекции на ось z:

$$F'(z) - m'g = [\Delta(mg) - \Delta F] - kz = \frac{F_0}{R}\Big(\frac{\Delta R}{2} - \frac{3\pi}{8}z\Big).$$

Нуль этой силы — положение равновесия: $z_0 = \dfrac{4}{3\pi}\Delta R$. Кольцо облегчило диск сильнее ($2\,\Delta R\,F_0/R$), чем ослабило отталкивание ($\frac{3}{2}\,\Delta R\,F_0/R$), поэтому диск не лежит на торце, а «всплывает» до зазора z_0. Равновесие устойчиво: сила убывает с ростом z.



Равнодействующая электростатической силы и силы тяжести как функция зазора z (схематически, $N_0 = \frac{\Delta R}{2R}F_0$). Диск радиуса R при $z > 0$ тянет к цилиндру, диск радиуса R' сначала выталкивается и приходит в равновесие при z_0.

Пункт 4. Период колебаний диска радиуса R'.

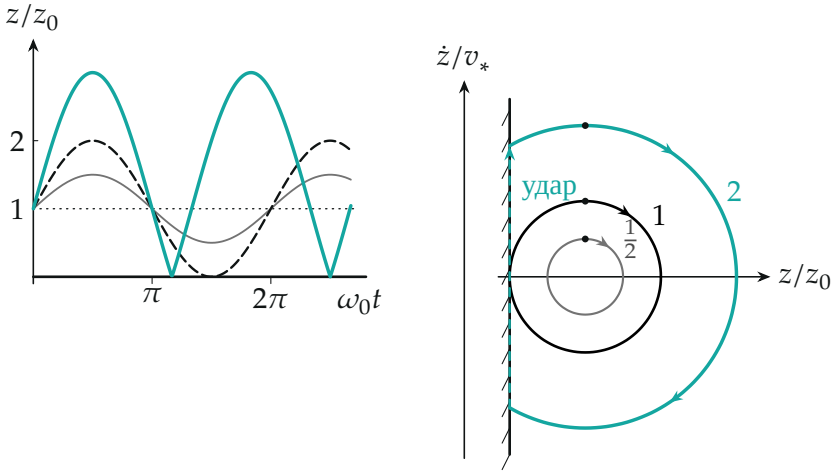
7. Движение вблизи равновесия. Пусть $x = z - z_0$. Из пункта 6: $m'\ddot{x} = -kx$, и так как $m' \approx M$ (отличие порядка $\Delta R/R$), частота та же, ω_0. При $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$ получаем $z(t) = z_0 + A\sin\omega_0 t$, $A = v_0/\omega_0$. Цилиндр не пускает диск ниже $z = 0$, поэтому всё зависит от того, достаёт ли амплитуда до торца ($A \le z_0$ или $A > z_0$). Граничная скорость

$$v_* = \omega_0 z_0 = \sqrt{\frac{3\pi g}{8R}}\cdot\frac{4\Delta R}{3\pi} = \sqrt{\frac{2}{3\pi}\,\frac{g}{R}}\,\Delta R.$$

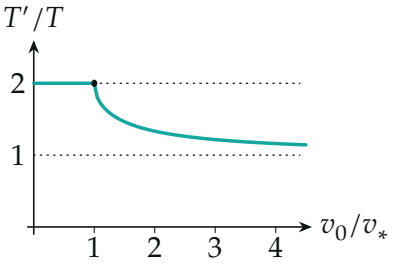
8. Случай $v_0 \le v_*$**.** Диск не достаёт до цилиндра, колебания гармонические: $T' = 2\pi/\omega_0 = 2T$.

9. Случай $v_0 > v_*$**.** Вернувшись в точку z_0 (время π/ω_0), диск летит вниз со скоростью v_0 и достигает торца через время t_1, где $z_0 - A\sin\omega_0 t_1 = 0$, то есть $t_1 = \dfrac{1}{\omega_0}\arcsin\dfrac{z_0}{A}$. После упругого удара движение идёт в обратном порядке: диск возвращается в z_0 тоже за время t_1 со скоростью v_0 вверх. Период

$$T' = \frac{\pi}{\omega_0} + 2t_1 = \sqrt{\frac{8}{3\pi}\frac{R}{g}}\left[\pi + 2\arcsin\frac{v_*}{v_0}\right], \qquad \frac{z_0}{A} = \frac{v_*}{v_0} = \sqrt{\frac{2}{3\pi}\frac{g}{R}}\,\frac{\Delta R}{v_0}.$$



Слева: зазор как функция времени (z_0 — единица): тонкая серая кривая — $v_0 = \frac{1}{2}v_*$, чёрная пунктирная — $v_0 = v_*$ (диск только касается цилиндра), бирюзовая — $v_0 = 2v_*$ (диск отскакивает, период сокращается). Справа: фазовый портрет — окружности радиусов v_0/v_* с центром в $z = z_0$; для $v_0 > v_*$ окружность обрезана стенкой, при ударе скорость скачком меняет знак.



Период колебаний диска радиуса R' в долях T: равен $2T$ при $v_0 \le v_*$ и убывает к T при $v_0 \gg v_*$.

Проверка. Размерности: D — кг/м^3 (Н/м^3 делить на м/с^2), z_0 — длина, v_* — м/с. Непрерывность: при $v_0 \to v_*$ имеем $\arcsin 1 = \pi/2$ и $T' = 2\pi/\omega_0 = 2T$. Предел: при $v_0 \gg v_*$ получаем $T' \to \pi/\omega_0 = T$ — ответ пункта 2, как и должно быть (зазор z_0 мал по сравнению с размахом колебаний). Второй способ для силы: интегрирование по всему диску по той же формуле для E_z даёт заданную F_0, а точный численный расчёт $F(z)$ даёт наклон $-(3\pi/8)F_0/R$ и равновесие $z_0 \to 4\Delta R/(3\pi)$ при $\Delta R/R \to 0$.

Смысл: отталкивание убывает с зазором потому, что часть потока поля уходит вбок через щель; а упругая стенка превращает колебание в «половину» гармонического.

Ответ. 1) $D = \dfrac{4}{3\pi}\dfrac{\rho^2 R}{\varepsilon_0 g}$; 2) $T = \pi\sqrt{\dfrac{8}{3\pi}\dfrac{R}{g}}$; 3) $z_0 = \dfrac{4}{3\pi}\Delta R$; 4) при $v_* = \sqrt{\dfrac{2}{3\pi}\dfrac{g}{R}}\,\Delta R$:

$$T' = \begin{cases} 2\pi\sqrt{\dfrac{8}{3\pi}\dfrac{R}{g}}, & v_0 \le v_*, \\ \sqrt{\dfrac{8}{3\pi}\dfrac{R}{g}}\left[\pi + 2\arcsin\dfrac{v_*}{v_0}\right], & v_0 > v_*. \end{cases}$$