Конденсатор Глюка

Задача 4. [ВсОШ 2024/25, 11 класс, задача 4] В самом начале карьеры экспериментатора Глюк увлекался разработкой новых устройств. Одним из них был конденсатор довольно необычной конструкции. На двух поверхностях прямоугольной стеклянной пластинки толщиной $h = 0{,}5$ мм было нанесено металлическое покрытие (П), игравшее роль обкладок конденсатора. При этом одна сторона пластинки была покрыта металлом полностью, вторая лишь частично (рис. 2). На свободный от покрытия участок помещалась маленькая капелька проводящей жидкости (К), полностью несмачивающей стекло. Подсоединённый к обкладке с жидкостью проводник раздваивался так, что одна его часть была подсоединена к участку с покрытием, второй конец был погружен в каплю жидкости.

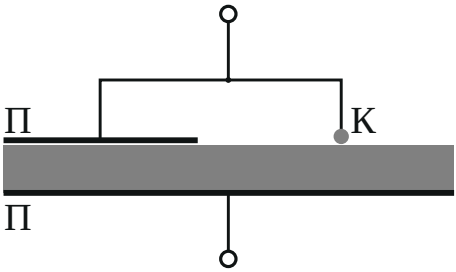


Рис. 2

В одном из экспериментов конденсатор Глюка подключался последовательно с другим конденсатором постоянной ёмкости (опорным) к регулируемому источнику напряжения. Напряжение источника плавно увеличивалось от нулевого значения, при этом исследовалась зависимость напряжения на опорном конденсаторе U_C от напряжения источника U. График зависимости состоял из двух линейных участков (рис. 3), при этом напряжение на опорном конденсаторе в точке излома составляло треть от напряжения источника U_1, соответствующего этой точке.

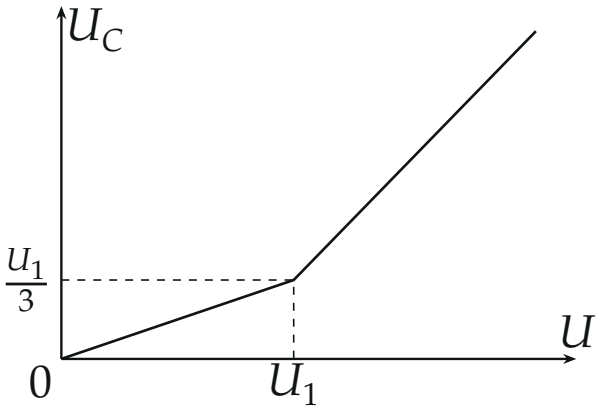


Рис. 3

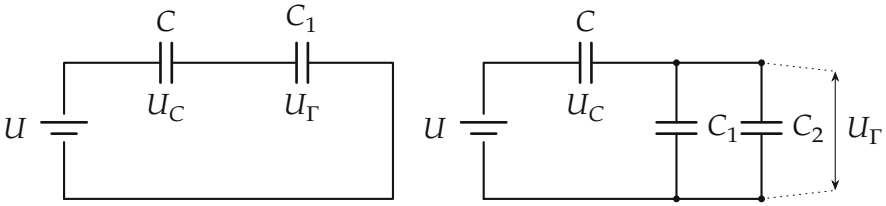
1. Чему равнялось напряжение на опорном конденсаторе при напряжении источника $U = 2U_1$?
2. Определите коэффициент поверхностного натяжения использованной Глюком жидкости, если $U_1 = 5{,}9$ кВ.

Электрическая постоянная равна $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 7$. Толщина стеклянной пластинки мала по сравнению с её размерами. Коэффициенты поверхностного натяжения жидкости на границе с воздухом и со стеклом одинаковы. Влиянием силы тяжести можно пренебречь.

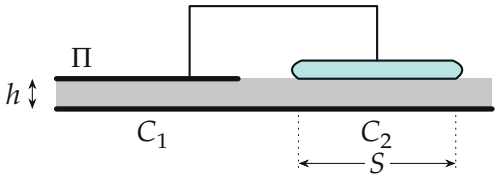
▲ **Решение. Что происходит.** Пока напряжение мало, капелька не растекается: растекание требует создания поверхности (энергия $2\sigma S$), а выигрыш от конденсатора между каплей и нижней обкладкой ещё меньше. Тогда конденсатор Глюка — обычный плоский конденсатор C_1, соединённый последовательно с опорным C, и график — прямая. Когда напряжение достигает U_1, растекание становится энергетически выгодным. Дальше растёкшаяся капля *удерживает напряжение на конденсаторе Глюка постоянным*: стоит ему чуть вырасти, капля растекается, ёмкость растёт и напряжение падает обратно. Всё, что источник добавляет сверх этого напряжения, падает на опорном конденсаторе, и наклон графика $U_C(U)$ становится равным единице. Класс задачи — минимум полной энергии системы «источник + конденсаторы + поверхность капли» (на-

пряжение растёт плавно, система всё время в равновесии).

Обозначения. C — ёмкость опорного конденсатора; C_1 — ёмкость конденсатора Глюка без капли (покрытая часть пластинки); C_2 — ёмкость, которую добавляет растёкшаяся капля; S — площадь растёкшейся капли, $C_2 = \varepsilon\varepsilon_0 S/h$ (стекло тонкое, конденсатор плоский); U_Γ — напряжение на конденсаторе Глюка; σ — поверхностное натяжение.



Эквивалентные схемы. Слева — капля не растекается: C и C_1 последовательно. Справа — капля растеклась: проводник соединяет её с покрытием, поэтому C_2 включён параллельно C_1.



Схематический разрез: C_1 — покрытая часть пластинки, C_2 — растёкшаяся капля над сплошной нижней обкладкой; h — толщина стекла.

1. До излома. Капелька маленькая, её вклад в ёмкость пренебрежимо мал, поэтому C и C_1 соединены последовательно. Заряды на них одинаковы:

$$q = U\frac{CC_1}{C+C_1}, \qquad U_C = \frac{q}{C} = \frac{C_1}{C+C_1}U.$$

Это прямая через начало координат. В точке излома $U_C = U_1/3$, значит, $\dfrac{C_1}{C+C_1} = \dfrac{1}{3}$ и $C = 2C_1$. Напряжение на конденсаторе Глюка в этой точке $U_\Gamma = U_1 - \dfrac{U_1}{3} = \dfrac{2}{3}U_1$.

2. Энергия системы после излома. Растёкшаяся капля — проводник, соединённый с покрытием; вместе они образуют верхнюю обкладку, и C_2 включён параллельно C_1 (рисунок). Общая ёмкость цепи

$$C_0 = \frac{C\,(C_1 + C_2)}{C + C_1 + C_2}.$$

Запишем полную энергию как сумму энергии источника, конденсаторов и поверхности капли. Через источник при зарядке проходит заряд $q = C_0 U$, и энергия источника *убывает* на qU; в конденсаторах запасено $q^2/(2C_0)$. У полностью несмачивающей капли граница стекло–воздух под ней исчезает, а появляются верхняя поверхность и граница со стеклом с равными коэффициентами σ, поэтому поверхностная энергия $2\sigma S = \dfrac{2\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0} C_2$:

$$W = -qU + \frac{q^2}{2C_0} + 2\sigma S = -\frac{C_0 U^2}{2} + \frac{2\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0} C_2.$$

Обратите внимание: знак у энергии источника отрицательный; именно из-за него растекание вообще может быть выгодным.

Равновесие — минимум W по C_2 при заданном U. Производная

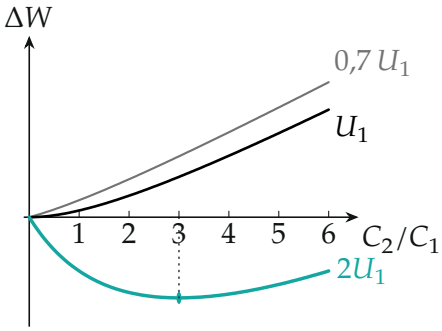
$$W'(C_2) = -\frac{C^2U^2}{2(C + C_1 + C_2)^2} + \frac{2\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad W'' = \frac{C^2U^2}{(C + C_1 + C_2)^3} > 0,$$

так что нуль производной — действительно минимум. Напряжение на конденсаторе Глюка равно $U_\Gamma = \dfrac{C_0 U}{C_1 + C_2} = \dfrac{CU}{C + C_1 + C_2}$, поэтому

$$W' = -\frac{U_\Gamma^2}{2} + \frac{2\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_\Gamma = \sqrt{\frac{4\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \text{const}.$$

Отсюда $C + C_1 + C_2 = CU/U_\Gamma$ и $C_2 = \dfrac{CU}{U_\Gamma} - C - C_1$. Площадь не может быть отрицательной, значит, формула верна при $U \geq U_1 = U_\Gamma \dfrac{C + C_1}{C}$.

При меньших U производная $W'(0)$ положительна, минимум на границе $C_2 = 0$ — капля не растекается, как мы и считали в пункте 1.

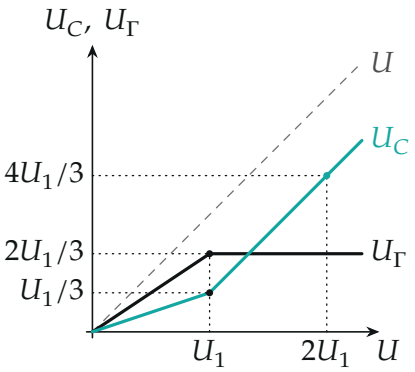


Изменение энергии $\Delta W = W(C_2) - W(0)$ (в условных единицах, C_2 — в единицах C_1). При $U < U_1$ минимум при $C_2 = 0$; при $U = U_1$ он только появляется; при $U = 2U_1$ минимум при $C_2 = 3C_1$.

Проверим согласованность: с $C = 2C_1$ порог $U_1 = \frac{3}{2}U_\Г$, то есть $U_\Г = \frac{2}{3}U_1$, ровно как в пункте 1 по графику. Тогда $C_2 = 3C_1\left(\frac{U}{U_1} - 1\right)$: площадь растёкшейся капли растёт линейно с напряжением.

3. Вопрос 1. При $U > U_1$ напряжение на конденсаторе Глюка постоянно, $U_\Г = \frac{2}{3}U_1$, а остальное падает на опорном конденсаторе: $U_C = U - U_\Г$. При $U = 2U_1$

$$U_C = 2U_1 - \frac{2}{3}U_1 = \frac{4}{3}U_1.$$



Напряжения на конденсаторах как функции U: до U_1 они делят U как $1:2$, после U_1 напряжение U_Γ постоянно, а U_C растёт с наклоном 1.

4. Вопрос 2. Из $U_\Gamma^2 = \dfrac{4\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0}$ и $U_\Gamma = \dfrac{2}{3}U_1$ получаем

$$\sigma = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 U_\Gamma^2}{4h} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 U_1^2}{9h} = \frac{7\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot (5{,}9\cdot 10^3)^2}{9\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3}} \approx 0{,}479\ \text{Н/м}.$$

Второй способ получить U_Γ — баланс на границе капли. Пусть капля растекается на малую площадь dS при напряжении U_Γ на конденсаторе Глюка. Его ёмкость растёт на $dC_2 = \varepsilon\varepsilon_0\, dS/h$; внешняя цепь совершает работу $U_\Gamma^2 dC_2$, а запасённая энергия растёт лишь на $U_\Gamma^2 dC_2/2$, то есть остаётся выигрыш $\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 U_\Gamma^2}{2h}\, dS$. Растекание прекращается, когда выигрыш равен затратам $2\sigma\, dS$: $\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 U_\Gamma^2}{2h} = 2\sigma$ — тот же результат.

Проверка. Размерность: $[\varepsilon_0 U^2/h] = \Phi\cdot \text{В}^2/\text{м}^2 = \text{Дж}/\text{м}^2 = \text{Н/м}$. Непрерывность: при $U = U_1$ обе формулы дают $U_C = U_1/3$. Значение 0,479 Н/м близко к натяжению ртути ($\approx 0{,}48$ Н/м). Численная минимизация $W(C_2)$ на python при $C = 2C_1$ даёт $U_\Gamma = \frac{2}{3}U_1$ при любом $U \geq U_1$ и $U_C(2U_1) = \frac{4}{3}U_1$.

Смысл: растёкшаяся капля работает как «стабилизатор»: весь прирост напряжения источника достаётся опорному конденсатору.

Ответ. 1) $U_C = \dfrac{4}{3}\,U_1 \approx 7{,}9$ кВ; 2) $\sigma = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 U_1^2}{9h} \approx 0{,}479$ Н/м.