Две половинки

Задача 5. [ВсОШ 2024/25, 11 класс, задача 5] На главной оптической оси (ГОО) тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F находится точечный монохроматический источник света S с длиной волны λ. Известно, что диаметр линзы равен D, причем $\sqrt{\lambda F} \ll D \ll F$. Линзу разрезают на две одинаковые половинки (полулинзы), которые смещают параллельно исходным положениям (см. рис. 4) вдоль ГОО. Одна половинка (верхняя) оказывается на расстоянии $d_1 = 4F/3$ от источника, а другая (нижняя) — на расстоянии $d_2 = 2F$.

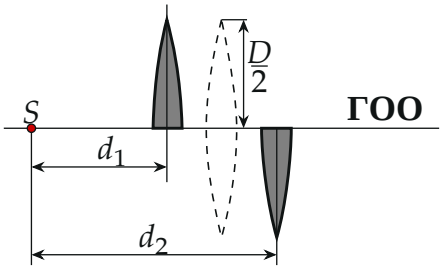


Рис. 4

1. Найдите на каких расстояниях l_1 и l_2 от источника находятся его изображения в верхней и нижней половинках линзы.

Перпендикулярно ГОО размещают экран на некотором расстоянии L от источника.

2. Опишите картину, которая наблюдается на экране (изобразите ее схематически на рисунке и определите величины существенных характеристик) при $L_1 = 3F$ и $L_2 = 6F$.
3. При каком расстоянии $L_3 > 2F$ на экране наблюдается изображение в форме круга?

Экран закрепляют на расстоянии $L_4 = 40F/9$ от источника.

4. Опишите качественно и объясните картину, которая наблюдается на экране, указав все характерные детали.
5. Пройдем из точки пересечения экрана ГОО вверх, до края наблюдаемой картины. Определите, сколько на этом пути окажется ин-

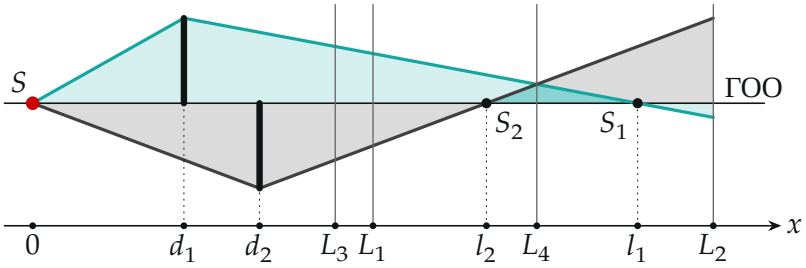
тервалов, на которых освещенность экрана будет возрастать? Для расчёта используйте значения: $F = 4$ м, $\lambda = 650$ нм, $D = 5$ см.

Считайте, что исходная линза была идеальной: она обладала свойством таутохронизма (лучи от одного источника, прошедшие через разные ее точки, достигают новой точки пересечения за одинаковое время) и при прохождении через ее фокус фаза световой волны скачком изменялась на π.

Все лучи, не попадающие непосредственно от источника на полулинзы, обрезаются диафрагмами.

▲ **Решение. Что происходит.** Каждая половинка даёт свой пучок и своё изображение источника на ГОО. До изображения сечение пучка — полукруг, радиус которого убывает к изображению; за изображением пучок расходится, и сечение переворачивается относительно ГОО. Пучки двух половинок перекрываются только между изображениями ($l_2 < L < l_1$): там они идут от двух когерентных точечных источников S_1 и S_2, и возникает интерференция. Главная идея: геометрическая оптика (формула линзы, подобные треугольники), затем интерференция двух источников на оси — через разность хода до S_1 и S_2.

Обозначения. Индекс 1 — верхняя полулинза, индекс 2 — нижняя. d_i — расстояние от источника до полулинзы, f_i — от полулинзы до изображения S_i, $l_i = d_i + f_i$ — от источника до изображения. Апертура каждой полулинзы — полукруг радиуса $D/2$ с прямым краем на ГОО.



Ход крайних лучей (масштаб по вертикали сильно увеличен: $D \ll F$). Бирюзовый пучок — от верхней полулинзы с изображением S_1, серый — от нижней с изображением S_2; тёмная область — перекрытие, она существует только между S_2 и S_1. Точка пересечения крайних лучей лежит над экраном L_4.

Пункт 1. Изображения.

Формула тонкой линзы для каждой половинки (фокус тот же, F): $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, откуда $f=\frac{dF}{d-F}$ и $l=d+f=\frac{d^2}{d-F}$. Для $d_1=\frac{4F}{3}$ и $d_2=2F$:

$$l_1=\frac{16F^2/9}{F/3}=\frac{16}{3}F,\quad f_1=4F;\qquad l_2=\frac{4F^2}{F}=4F,\quad f_2=2F.$$

Пункт 2. Картина на экране при $L_1=3F$ и $L_2=6F$.

Крайние лучи каждого пучка идут от краёв полулинзы (на расстоянии $D/2$ от ГОО) к изображению S_i. По подобию треугольников с вершиной в S_i радиус полукруга на экране на расстоянии L от источника равен

$$r_i(L)=\frac{D}{2}\frac{|l_i-L|}{f_i}.$$

При $L<l_i$ полукруг лежит по ту же сторону ГОО, что и полулинза; при $L>l_i$ пучок уже прошёл изображение, и полукруг лежит по другую сторону.

При $L_1=3F<l_2<l_1$ оба пучка не дошли до изображений: верхний даёт полукруг над ГОО, нижний — под ГОО, они не перекрываются:

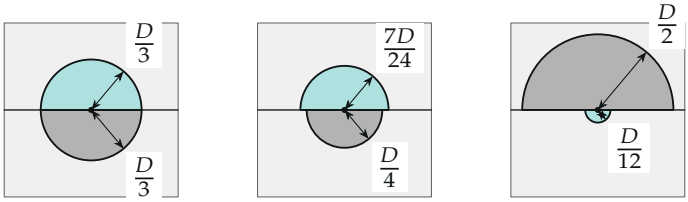
$$r_{\text{в}}=\frac{D}{2}\cdot\frac{16/3-3}{4}=\frac{7D}{24},\qquad r_{\text{н}}=\frac{D}{2}\cdot\frac{4-3}{2}=\frac{D}{4},$$

отношение $r_{\text{в}}/r_{\text{н}}=7/6$. При $L_2=6F>l_1>l_2$ оба пучка прошли свои изображения и перевернулись: пучок верхней полулинзы лежит под ГОО, пучок нижней — над ГОО:

$$r_{\text{н}}=\frac{D}{2}\cdot\frac{6-16/3}{4}=\frac{D}{12},\qquad r_{\text{в}}=\frac{D}{2}\cdot\frac{6-4}{2}=\frac{D}{2},$$

отношение $r_{\text{в}}/r_{\text{н}}=6$. Верхний полукруг на экране — от *нижней* полулинзы, и наоборот. Освещённость каждого полукруга однородна: мощность пучка пропорциональна телесному углу полулинзы, то есть $1/d_i^2$, а площадь сечения $\frac{\pi}{2}r_i^2$. Отсюда $E_i=I_0\,\Gamma_i^2/(l_i-L)^2$, где $\Gamma_i=f_i/d_i$

($\Gamma_1 = 3$, $\Gamma_2 = 1$). Верхний полукруг при L_1 ярче нижнего в $81/49$ раза, а маленький нижний при L_2 ярче большого верхнего в 81 раз.



$L_3 = \frac{8}{3}F$ $L_1 = 3F$ $L_2 = 6F$

Картина на экране (вид со стороны источника, радиусы выражены через D). Бирюзовый полукруг — пучок верхней полулинзы, серый — нижней. Слева — круг при L_3 (пункт 3).

Пункт 3. Изображение в форме круга.

Круг получается, когда полукруги лежат по разные стороны ГОО и их радиусы равны. Экран стоит за обеими полулинзами ($L > d_2 = 2F$), поэтому для двух сторон есть два случая. До обоих изображений ($L < l_2$): $\dfrac{l_1 - L}{f_1} = \dfrac{l_2 - L}{f_2}$, то есть $\dfrac{16/3 - L/F}{4} = \dfrac{4 - L/F}{2}$, откуда

$$L_3 = \frac{8}{3}F, \qquad r = \frac{D}{2}\cdot\frac{4 - 8/3}{2} = \frac{D}{3}.$$

За обоими изображениями ($L > l_1$) то же равенство радиусов $\dfrac{L - l_1}{f_1} = \dfrac{L - l_2}{f_2}$ даёт $L = \dfrac{8}{3}F < l_1$ — противоречит предположению. Между изображениями ($l_2 < L < l_1$) пучки лежат по одну сторону ГОО. Итак, единственный круг — при $L_3 = \dfrac{8}{3}F$.

Пункт 4. Картина при $L_4 = 40F/9$.

1. Геометрия. Здесь $l_2 < L_4 < l_1$: пучок верхней полулинзы ещё не дошёл до S_1, пучок нижней уже прошёл S_2 и перевернулся. Оба лежат над ГОО, и радиусы

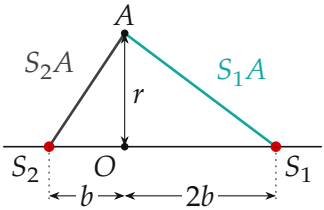
$$r_\text{в} = \frac{D}{2}\cdot\frac{16/3 - 40/9}{4} = \frac{D}{9}, \quad r_\text{н} = \frac{D}{2}\cdot\frac{40/9 - 4}{2} = \frac{D}{9}$$

совпадают: пучки накладываются точно. Это тот L_4, на котором пересекаются крайние лучи (рисунок в начале). Картина — один полукруг радиуса $D/9$ над ГОО, а под ГОО экран тёмный. Источники S_1 и S_2 когерентны (оба — изображения одного S), поэтому в полукруге интерференция.

2. Разность хода. Обозначим A точку экрана на расстоянии r от ГОО, O — точку пересечения экрана с ГОО, $b = S_2O = \frac{4}{9}F$, тогда $S_1O = 2b = \frac{8}{9}F$ и $S_1S_2 = 3b$. Оптический путь от S до S_i через i-ю полулинзу — общая для обеих добавка от стекла плюс l_i (по таутохронизму все лучи через половинку идут одинаково долго, а осевой луч проходит одинаковую толщину стекла): $\Lambda_i = l_i + \Lambda_0$. Пучок верхней полулинзы ещё сходится к S_1, поэтому до точки A его путь на S_1A короче: $\Lambda_1 - S_1A$. Пучок нижней полулинзы уже прошёл фокус S_2 и расходится, путь $\Lambda_2 + S_2A$, и при прохождении фокуса его фаза скачком возросла на π. Разность фаз

$$\Delta\varphi(A) = \pi + \frac{2\pi}{\lambda}(\Lambda_2 - \Lambda_1 + S_2A + S_1A) = \pi + \frac{2\pi}{\lambda}\,\delta,$$

где $\delta = S_1A + S_2A - S_1S_2$, так как $\Lambda_2 - \Lambda_1 = l_2 - l_1 = -S_1S_2$. Обратите внимание: скачок π получает пучок, который успел пройти фокус до экрана, то есть нижний (прошёл S_2); верхний до экрана S_1 не достиг.



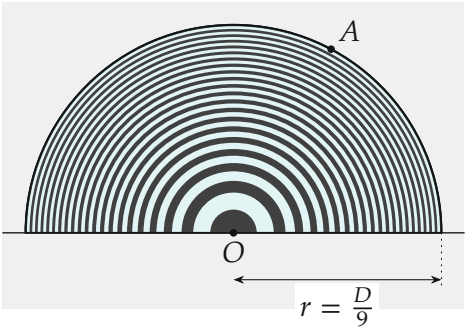
Сечение плоскостью через ГОО перпендикулярно прямому краю полулинз: S_2 и S_1 — изображения, O — центр картины, A — точка на расстоянии r (расстояния b и $2b$ не в масштабе по r).

3. Картина. В центре O точка лежит между S_2 и S_1, $S_1O + S_2O = S_1S_2$, то есть $\delta = 0$ и $\Delta\varphi = \pi$: волны гасят друг друга, там тёмное

пятно. С ростом r величина δ растёт; освещённость

$$I = I_a + I_b - 2\sqrt{I_a I_b}\,\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

минимальна при $\delta = m\lambda$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) и максимальна при $\delta = (m + \frac{1}{2})\lambda$. Так как δ зависит только от r, картина — чередующиеся тёмные и светлые *полукольца* с общим центром O внутри полукруга радиуса $D/9$. Ширина колец уменьшается к краю: при $r \ll b$ имеем $\delta \approx \dfrac{3r^2}{4b}$, и радиусы тёмных колец $r_m = \sqrt{4b\,m\lambda/3} \propto \sqrt{m}$. Яркости пучков относятся как $I_a : I_b = \Gamma_1^2/(l_1 - L_4)^2 : \Gamma_2^2/(L_4 - l_2)^2 = 9 : 4$, поэтому минимумы не совсем чёрные (отношение максимума к минимуму 25).



Картина на экране при L_4 (схема): полукруг радиуса $D/9$ над ГОО, в центре — тёмное пятно, дальше чередуются светлые и тёмные полукольца, к краю — гуще. Тёмные полосы показаны около $\delta = m\lambda$ ($m = 0, \dots, 20$).

Пункт 5. Число интервалов возрастания освещённости.

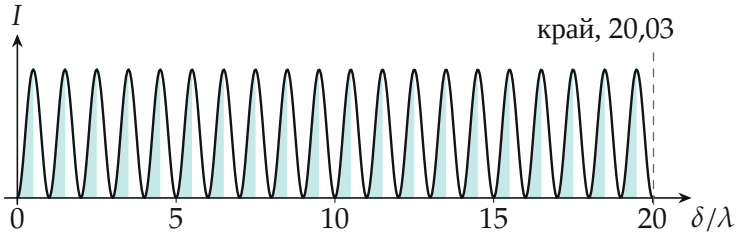
Идём от O к краю полукруга ($r = D/9$): освещённость возрастает на интервалах $m\lambda < \delta < (m + \frac{1}{2})\lambda$, от тёмного к светлому. Найдём δ на краю. С $r = D/9$, $b = 4F/9$ и $r \ll b$ (разложение $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$):

$$\delta_{\max} = \sqrt{4b^2 + r^2} + \sqrt{b^2 + r^2} - 3b \approx \frac{r^2}{4b} + \frac{r^2}{2b} = \frac{3r^2}{4b} = \frac{D^2}{48F},$$

$$k = \frac{\delta_{\max}}{\lambda} = \frac{D^2}{48\lambda F} = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{48 \cdot 0{,}65 \cdot 10^{-6} \cdot 4} \approx 20{,}03.$$

Значит, возрастающие интервалы начинаются при $\delta = 0,\ \lambda,\ 2\lambda,\ \dots,\ 19\lambda$ — это **20 интервалов**, — и ещё при $\delta = 20\lambda$ начинается двадцать первый, обрезанный краем картины. Двадцать — полные светлые полукольца (максимумы при $\delta = \frac{1}{2}\lambda, \dots, 19\frac{1}{2}\lambda$), а последний — тонкая полоска роста у самого края: ширина по r около 4 мкм.

Обратите внимание: $k \approx 20{,}03$ чуть больше целого. Основной ответ — 20 интервалов возрастания: столько полных светлых полуколец, и только они видны на опыте. Последний интервал (от $\delta = 20\lambda$ до $20{,}03\lambda$) шириной около 4 мкм формально тоже интервал возрастания, поэтому ответ 21 с таким объяснением организаторы тоже засчитывают.



Освещённость как функция δ/λ (схема для равных яркостей пучков). Закрашены интервалы возрастания: 20 *полных и обрезанный краем от* 20 *до* 20,03 *(на рисунке не виден).*

Проверка. Размерность: $D^2/(\lambda F)$ безразмерно. Условие $\sqrt{\lambda F} \ll D$ выполнено ($D^2/(\lambda F) \approx 10^3$), $D \ll F$ даёт $r \ll b$ для разложения. Точная формула для $\delta_{\max}$ и приближённая дают одно и то же $k = 20{,}032$.

Смысл: две половинки линзы дают два когерентных источника на оси, и число светлых колец задаёт отношение $D^2/(\lambda F)$.

Ответ. 1) $l_1 = \dfrac{16}{3}F,\ l_2 = 4F$; 2) два равномерно освещённых полукруга по разные стороны ГОО: при $L_1 = 3F$ верхний радиуса $\dfrac{7D}{24}$, нижний $\dfrac{D}{4}$ ($r_в/r_н = \dfrac{7}{6}$); при $L_2 = 6F$ верхний радиуса $\dfrac{D}{2}$, нижний $\dfrac{D}{12}$ ($r_в/r_н = 6$); 3) $L_3 = \dfrac{8}{3}F$; 4) над ГОО полукруг радиуса $\dfrac{D}{9}$, в центре тёмное пятно, дальше светлые и тёмные полукольца; 5) $k = \dfrac{D^2}{48\lambda F} \approx 20$ (с краевой полоской роста — 21; верны оба).