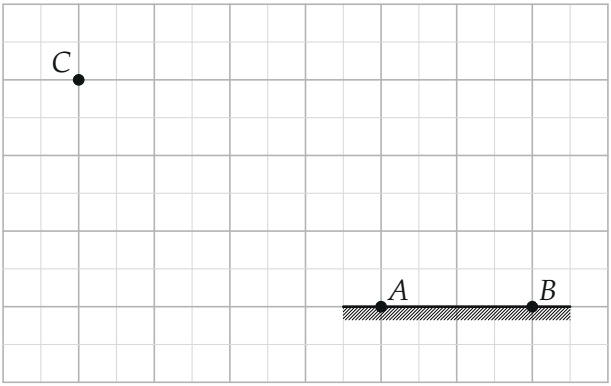
Дал Маха

Задача 1. [ВсОШ 2024/25, заключительный этап, 9 класс, теоретический тур, задача 1] «Дал Маха».

Микрофон, установленный в точке A горизонтальной поверхности (см. рисунок), зафиксировал сигнал от сверхзвукового самолёта спустя время t после его пролёта над этой точкой. Ещё через время t звук начал регистрироваться микрофоном, расположенным в точке B.

Известно, что первый сигнал, зарегистрированный микрофоном B, был испущен самолётом из точки C. Самолёт двигался равномерно и прямолинейно в одной вертикальной плоскости с микрофонами.



1. С помощью геометрических построений восстановите траекторию полёта самолёта и определите его местоположения в моменты регистрации звуковых сигналов микрофонами.

Примечание. Стандартные процедуры геометрических построений считайте известными.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Сверхзвуковой самолёт обгоняет свой звук: звуковые сферы, испущенные в разные моменты, огибает конус Маха с вершиной в самолёте. В плоскости рисунка это две прямые (образующие), и звук впервые слышен в точке в тот момент, когда до неё доходит образующая. Главная идея: при равномерном прямолинейном полёте образующая движется вместе с самолётом, не поворачиваясь, —

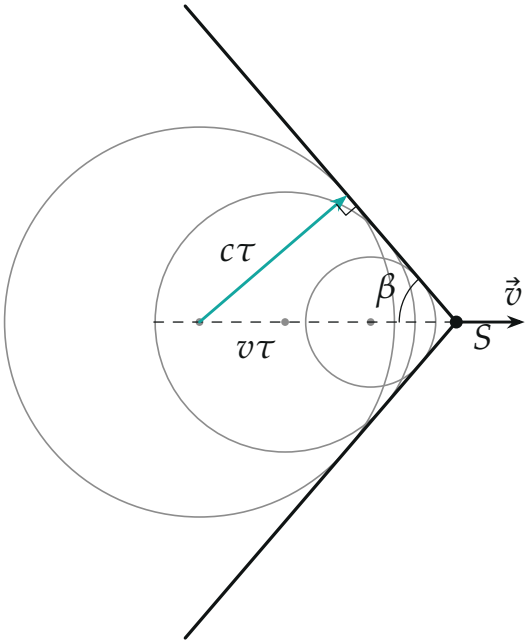
все её положения параллельны. Задача на построение: найти направление образующей, потом её положения в три момента, потом самолёт на них.

Обозначения. v — скорость самолёта, c — скорость звука, β — угол между образующей конуса Маха и траекторией. D — самолёт над A, S_1 и S_2 — самолёт в моменты, когда звук начал регистрироваться в A и в B. Отсчёт времени — от пролёта над A: D при 0, S_1 при t, S_2 при $2t$.

1. Конус Маха. Звук, испущенный время τ назад, — окружность радиуса $c\tau$ с центром в точке, оставшейся на $v\tau$ позади самолёта. Касательная из самолёта к этой окружности — образующая; радиус в точку касания ей перпендикулярен (рисунок ниже), поэтому

$$\sin\beta = \frac{c\tau}{v\tau} = \frac{c}{v}.$$

Угол β от τ не зависит — одна прямая касается всех окружностей. Два вывода для построения: (а) звук, испущенный из точки траектории, приходит в точку на образующей *по перпендикуляру* к образующей; (б) образующая переносится вместе с самолётом параллельно самой себе.

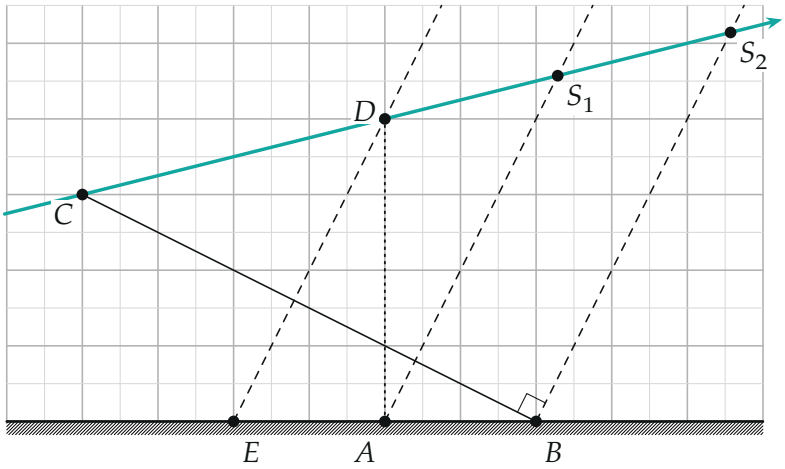


Конус Маха в плоскости: окружности звука, испущенного 1,5, 3 и 4,5 условной единицы времени назад, огибают две прямые; радиус $c\tau$ перпендикулярен образующей.

2. Направление образующей. Микрофон B первым услышал звук из точки C. По выводу (а) отрезок CB перпендикулярен образующей, которая в этот момент проходит через B. Строим через B перпендикуляр к CB — это образующая в момент регистрации в B (самолёт в S_2 на ней). На сетке: CB идёт на 12 клеток вправо и 6 вниз, значит, перпендикуляр идёт на 1 клетку вправо и 2 вверх.

3. Образующая в момент t и в момент 0. В момент t звук пришёл в A — образующая проходит через A параллельно найденной (вывод (б)). Точка пересечения образующей с землёй движется равномерно (образующая переносится равномерно): от A до B она дошла за время t, значит, за время t до прихода в A она была на расстоянии AB левее A, в точке E. Проводим через E прямую, параллельную образующей, — это образующая в момент 0. Самолёт в этот момент над A, т. е. на вертикали через A: точка D — пересечение этой вертикали с образующей через E.

4. Траектория и положения S_1, S_2. Траектория прямая и проходит через C и D. Самолёт в момент t — на траектории и на образующей через A: точка S_1; в момент $2t$ — на образующей через B: точка S_2.



Построение. Через B — перпендикуляр к CB (образующая в момент $2t$); параллельно ей — образующие через A (момент t) и через E, $AE = AB$ (момент

0). *Пересечение последней с вертикалью через A — точка D; траектория CD (бирюзовая) пересекает образующие в S_1 и S_2.*

В клетках (начало в A, ось x вправо, y вверх): $C(-8;6)$, $B(4;0)$, $E(-4;0)$, $D(0;8)$. Траектория $(-8+4u;\ 6+u)$, образующая через A — $(s;\ 2s)$, через B — $(4+s;\ 2s)$:

$$S_1=\left(\tfrac{32}{7};\ \tfrac{64}{7}\right)\approx(4{,}6;\ 9{,}1),\qquad S_2=\left(\tfrac{64}{7};\ \tfrac{72}{7}\right)\approx(9{,}1;\ 10{,}3).$$

Обратите внимание. Звук из C пришёл в B не тогда, когда самолёт был в C, а позже — когда самолёт уже в S_2; на рисунке C и S_2 разные точки одной траектории. Именно поэтому по C находится не положение самолёта, а направление образующей.

Проверка. *Равномерность:* на траектории D, S_1, S_2 соответствуют параметрам $u=2$, $\frac{22}{7}$, $\frac{30}{7}$ — шаги DS_1 и S_1S_2 равны $(\frac{8}{7})$, т. е. пройдены за одинаковое время t, как и должно быть. *Угол Маха вторым способом:* угол между траекторией $(4;1)$ и образующей $(1;2)$: $\cos\beta=\frac{6}{\sqrt{17}\sqrt{5}}$, $\sin\beta=0{,}759$. С другой стороны, пока звук шёл из C в B ($CB=\sqrt{180}\approx 13{,}4$ клетки), самолёт пролетел $CS_2=\frac{30}{7}\sqrt{17}\approx 17{,}7$ клетки, $c/v=13{,}4/17{,}7=0{,}759$ — совпадает с $\sin\beta$. Самолёт летит с числом Маха $v/c\approx 1{,}32$. Смысл: по моменту прихода звука в две точки и по одной точке траектории можно восстановить весь полёт, потому что форма звукового фронта жёстко связана с самолётом.

Ответ. Траектория — прямая CD, где D — положение самолёта над A (8 клеток над A), найденное построением; положения самолёта в моменты регистрации звука в A и B — точки $S_1(\frac{32}{7};\frac{64}{7})$ и $S_2(\frac{64}{7};\frac{72}{7})$ клеток относительно A (рисунок построения). Число Маха $v/c\approx 1{,}32$.