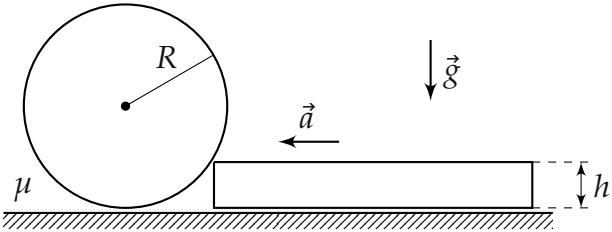
Сингулярность

Задача 2. [ВсОШ 2024/25, заключительный этап, 9 класс, теоретический тур, задача 2] «Сингулярность».

На горизонтальной поверхности находятся два тела: длинная доска высотой h и однородный цилиндр радиусом $R = 2h$, которые касаются друг друга (см. рисунок). Масса цилиндра равна M. Коэффициенты трения между цилиндром и поверхностью, а также между самими телами, одинаковы и равны μ.



Доска движется с постоянным горизонтальным ускорением a, направленным перпендикулярно линии контакта с цилиндром. Ускорение свободного падения равно g.

1. При каких значениях ускорения a доски цилиндр не будет поворачиваться вокруг горизонтальной оси, если коэффициент трения μ может принимать любые значения больше нуля?

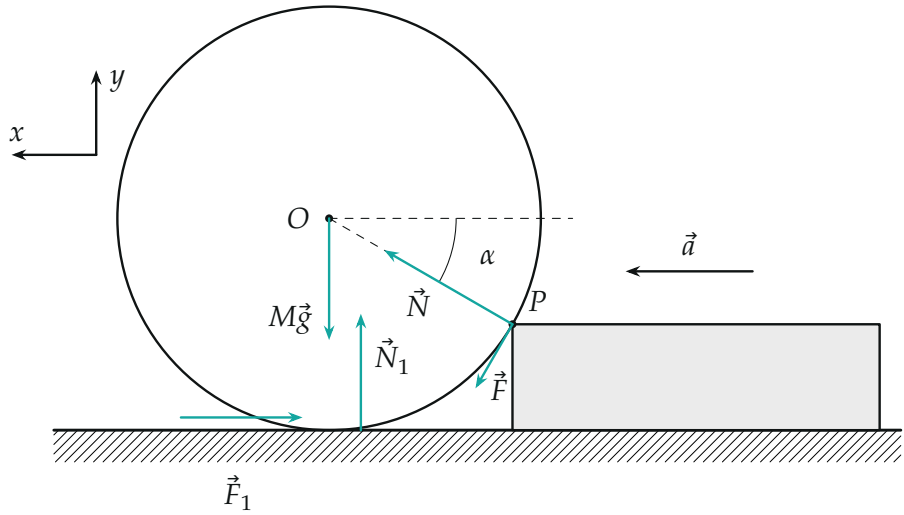
▲ **Решение.** **Что происходит.** Доска упирается верхним ребром в цилиндр и толкает его влево. Цилиндр движется поступательно вместе с доской и по полу скользит — трение пола кинетическое, μN_1, и оно стремится закрутить цилиндр. Не дать ему вращаться может только трение со стороны доски: его момент должен уравновесить момент трения пола. Класс задачи — «равновесие на грани»: записываем второй закон Ньютона и правило моментов, а затем требуем, чтобы все реакции были допустимы: пол давит ($N_1 > 0$), трение доски не больше предельного. В ответе появляется особая точка $\mu = \sqrt{3}$, где знаменатели обращаются в нуль, — отсюда название задачи.

Обозначения. Ось x — горизонтально влево (вдоль $\vec{a}$), ось y — вверх. N и F — нормальная реакция и сила трения со стороны доски (в точке контакта P на ребре доски), N_1 и $F_1 = \mu N_1$ — со стороны пола. α — угол радиуса OP с горизонталью.

1. Геометрия. Центр O на высоте R, ребро доски — на высоте $h = R/2$:

$$\sin\alpha = \frac{R-h}{R} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = 30^\circ.$$

Реакция N направлена по радиусу от P к O (влево-вверх под 30° к горизонтали), трение F — по касательной в P.



Тело M: сила тяжести, реакции доски (N, F) в точке P на её ребре и пола (N_1, F_1). Цилиндр едет влево и скользит по полу, поэтому $F_1 = \mu N_1$ направлена вправо.

2. Правило моментов. Цилиндр не вращается, значит, сумма моментов сил относительно центра масс O равна нулю (силы инерции, если перейти в систему цилиндра, приложены к O и момента не дают). N, N_1 и Mg проходят через O. Плечо каждой силы трения — R (обе касательны к окружности):

$$FR = F_1 R \;\Rightarrow\; F = F_1 = \mu N_1.$$

Трение доски направлено так, чтобы закручивать цилиндр навстречу трению пола, — по касательной влево-вниз.

3. Второй закон Ньютона для цилиндра в проекциях:

$$\begin{aligned} x:&\quad N\cos\alpha + F\sin\alpha - F_1 = Ma,\\ y:&\quad N\sin\alpha - F\cos\alpha + N_1 - Mg = 0. \end{aligned}$$

С $\alpha = 30^\circ$ и $F = F_1 = \mu N_1$:

$$\frac{\sqrt3}{2}N - \frac{\mu}{2}N_1 = Ma, \qquad \frac12 N + \Big(1 - \frac{\sqrt3}{2}\mu\Big)N_1 = Mg.$$

Решаем систему (из первого уравнения N, подставляем во второе):

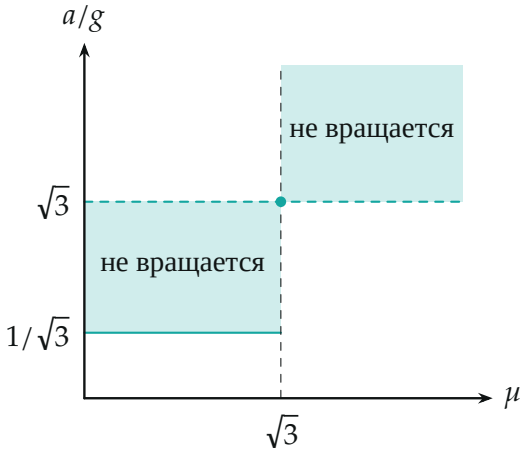
$$N_1 = M\,\frac{\sqrt3 g - a}{\sqrt3 - \mu}, \qquad N = M\,\frac{a(2-\sqrt3\mu) + \mu g}{\sqrt3 - \mu}.$$

4. Условия. Цилиндр касается пола: $N_1 > 0$. Трение доски не больше предельного: $F = \mu N_1 \leqslant \mu N$, т. е. $N_1 \leqslant N$. Знак знаменателя $\sqrt3 - \mu$ решает всё.

Случай $\mu < \sqrt3$ (знаменатель положителен). $N_1 > 0$: $a < \sqrt3 g$. $N_1 \leqslant N$: $\sqrt3 g - a \leqslant a(2-\sqrt3\mu) + \mu g$, т. е. $(\sqrt3 - \mu)g \leqslant \sqrt3(\sqrt3 - \mu)a$, $a \geqslant g/\sqrt3$. Итог: $g/\sqrt3 < a < \sqrt3 g$ (при $a = g/\sqrt3$ трение доски ровно предельное — граница).

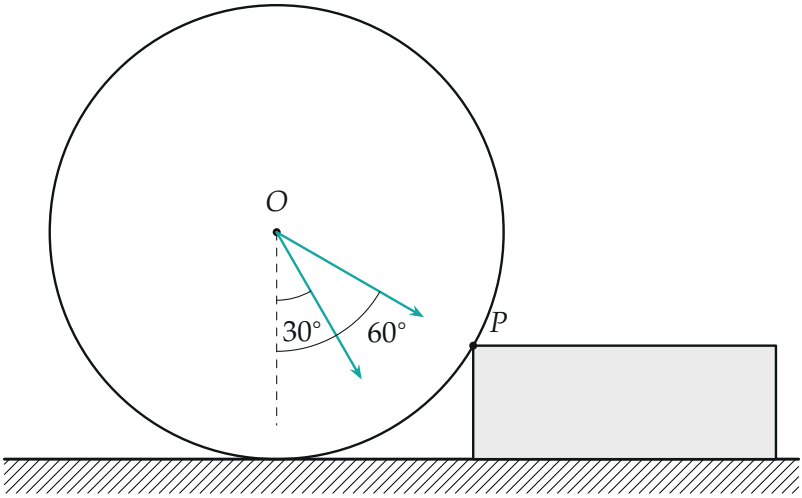
Случай $\mu > \sqrt3$ (знаменатель отрицателен, неравенства меняют знак). $N_1 > 0$: $a > \sqrt3 g$. $N_1 \leqslant N$: $a \leqslant g/\sqrt3$ после деления на отрицательное $\sqrt3(\sqrt3 - \mu)$ превращается в $a \geqslant g/\sqrt3$ — слабее первого. Итог: $a > \sqrt3 g$.

Случай $\mu = \sqrt3$ — «сингулярность»: формулы неприменимы, вернёмся к системе. Второе уравнение даёт $\frac12 N - \frac12 N_1 = Mg$, т. е. $N = 2Mg + N_1$; подставив в первое: $\sqrt3 Mg = Ma$. Решение есть только при $a = \sqrt3 g$ (и тогда годится любое $N_1 > 0$).



Область, где цилиндр не вращается (бирюзовым), в осях «коэффициент трения — ускорение доски». При $\mu = \sqrt{3}$ — единственная точка $a = \sqrt{3}\,g$.

5. Второй способ (три силы). В системе отсчёта доски (и цилиндра) на цилиндр действует эффективная сила тяжести $M(\vec{g} - \vec{a})$, отклонённая от вертикали вправо на угол γ, $\operatorname{tg}\gamma = a/g$; полная реакция пола $\vec{Q} = \vec{N}_1 + \vec{F}_1$ отклонена от вертикали на угол трения φ, $\operatorname{tg}\varphi = \mu$; реакция доски $\vec{Q}_1$ — от нормали PO не больше чем на φ. При равновесии три силы пересекаются в одной точке. При $\gamma = 60°$ ($a = \sqrt{3}g$) эффективная тяжесть идёт ровно по OP — цилиндр опирается только на ребро доски, $N_1 = 0$; при $\gamma = 30°$ ($a = g/\sqrt{3}$) реакция доски отклонена от нормали ровно на φ — трение доски предельное. Линия $\vec{Q}$ проходит через P как раз при $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$ — отсюда смена режима при $\mu = \sqrt{3}$. Те же границы $\operatorname{tg}30°$ и $\operatorname{tg}60°$, что и в пункте 4.



Предельные направления эффективной силы тяжести $M(\vec{g}-\vec{a})$: под 30° к вертикали (трение доски предельное) и под 60° — вдоль OP (пол перестаёт давить).

Обратите внимание. При $\mu > \sqrt{3}$ знаменатель $\sqrt{3}-\mu$ отрицателен: при решении неравенств знаки меняются, и разрешённая область перескакивает с полосы $g/\sqrt{3} < a < \sqrt{3}g$ на $a > \sqrt{3}g$. «Большое трение помогает» — но совсем при других ускорениях.

Проверка. Размерность: N, N_1 — $M\cdot$[ускорение], сила. Численная проверка (решение системы пункта 3 на сетке значений a): при $\mu = 0{,}5$; 1; 1,5 условия выполняются при $0{,}578\,g < a < 1{,}731\,g$, при $\mu = 2$; 3 — при $a > 1{,}732\,g$, что совпадает с $1/\sqrt{3} = 0{,}577$ и $\sqrt{3} = 1{,}732$. Смысл: граница $a = \sqrt{3}g$ — момент, когда цилиндр «вкатывается» на доску и отрывается от пола; $a = g/\sqrt{3}$ — когда трения доски перестаёт хватать.

Ответ. При $\mu < \sqrt{3}$: $\dfrac{g}{\sqrt{3}} < a < \sqrt{3}\,g$; при $\mu > \sqrt{3}$: $a > \sqrt{3}\,g$; при $\mu = \sqrt{3}$: $a = \sqrt{3}\,g$.