Задача трёх тел

Задача 3. [ВсОШ 2024/25, заключительный этап, 9 класс, теоретический тур, задача 3] «Задача трёх тел».

В далёкой-далёкой галактике станции инопланетян способны притягивать космические корабли, находящиеся в зоне их действия. Сила притяжения $\vec{F}$ прямо пропорциональна расстоянию $\vec{r}$ от станции до корабля: $\vec{F} = -P\vec{r}$, где P — коэффициент силы станции.

Три такие станции расположены в вершинах прямоугольного треугольника с углом 30° и гипотенузой длиной l. Две станции, находящиеся в вершинах острых углов, характеризуются коэффициентом силы P, а станция в вершине прямого угла — коэффициентом силы $2P$.

В пунктах 1–3 космические станции неподвижны.

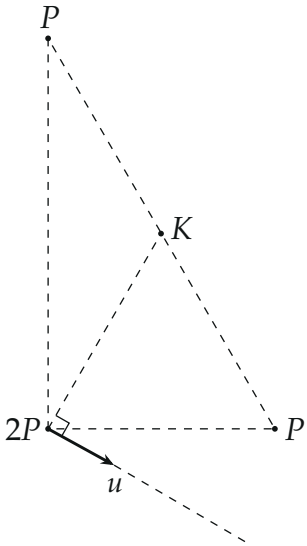
1. Определите расстояния от каждой станции до точки, в которой корабль будет находиться в равновесии.

В начальный момент времени космический корабль массой m находится на середине гипотенузы треугольника, в вершинах которого находятся станции. Скорость корабля равна нулю, двигатели не работают.

2. Определите максимальную скорость корабля $v_{\max}$ в процессе дальнейшего движения.

3. На какое минимальное расстояние в процессе движения корабль приблизится к станции, находящейся в вершине прямого угла?

Космический корабль, вновь оказывается в середине гипотенузы с нулевой начальной скоростью. Однако в этот момент времени станция в вершине прямого угла начинает двигаться с постоянной скоростью $u = 2v_{\max}$ вдоль прямой, перпендикулярной начальному направлению на корабль (см. рисунок). Станции, находящиеся в вершинах острых углов, остаются неподвижными.



4. Спустя какое время и на каком расстоянии от начального положения корабль впервые остановится?

Примечание: все объекты можно считать точечными, на корабль не действуют другие силы, кроме сил притяжения со стороны станций.

▲ **Решение. Что происходит.** Сила $-P\vec{r}$ — это сила пружины нулевой длины, закреплённой на станции. Сумма таких сил снова сила одной «пружины»: $-P\vec{r}_A - P\vec{r}_B - 2P\vec{r}_C = -4P\,\overrightarrow{MK}$, где M — центр масс воображаемых масс m, m, $2m$ в вершинах. Значит, корабль — гармонический осциллятор с жёсткостью $4P$ и центром в M: в пунктах 1–3 он колеблется по прямой через M, а в пункте 4 точка M сама движется равномерно, и в её системе отсчёта корабль идёт по окружности. Класс задачи — «линейная сила ⇒ осциллятор», плюс переход в инерциальную систему центра.

Обозначения. C — вершина прямого угла (станция $2P$), A — вершина угла $30°$, B — угла $60°$ (станции P); O — середина гипотенузы, K — корабль. Начало координат в C, ось x вдоль CB, ось y вдоль CA: $CB = l\sin 30° = l/2$, $CA = l\cos 30° = \sqrt{3}\,l/2$. $\omega = \sqrt{4P/m}$.

Пункт 1. Положение равновесия. Пусть $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ — векторы от

станций к кораблю. Принцип суперпозиции, сумма сил:

$$\vec{F} = -P\vec{r}_A - P\vec{r}_B - 2P\vec{r}_C.$$

Запишем $\vec{r}_A = \vec{K} - \vec{A}$ и т. д. (векторы точек от C):

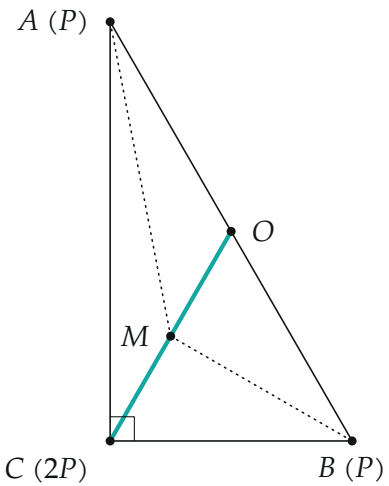
$$\vec{F} = -4P\Big(\vec{K} - \frac{\vec{A}+\vec{B}+2\vec{C}}{4}\Big) = -4P\,\overrightarrow{MK}, \qquad \vec{M} = \frac{\vec{A}+\vec{B}+2\vec{C}}{4}.$$

M — центр масс масс m, m, $2m$ в A, B, C; сила равна нулю только при $K = M$. С $\vec{C} = 0$: $\vec{M} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{4} = \frac{\vec{O}}{2}$ — середина медианы CO, $M(\frac{l}{8}; \frac{\sqrt{3}l}{8})$. Расстояния по теореме Пифагора:

$$CM = \frac{CO}{2} = \frac{l}{4}, \qquad BM = \frac{l}{8}\sqrt{3^2+3} = \frac{\sqrt{3}\,l}{4},$$

$$AM = \frac{l}{8}\sqrt{1+27} = \frac{\sqrt{7}\,l}{4}.$$

(Медиана к гипотенузе $CO = l/2$.)



Станции и точка равновесия M — середина медианы CO. Корабль колеблется по отрезку CO вокруг M с амплитудой $l/4$.

Пункт 2. Максимальная скорость. Сила $-4P\overrightarrow{MK}$ в начальной точке O направлена по OM, начальная скорость нуль — корабль движется по прямой OC, как груз на пружине жёсткостью $4P$ с центром M. Скорость наибольшая в положении равновесия M. Закон сохранения энергии от O до M (энергия «пружины» $4P\cdot MK^2/2$, $OM=l/4$):

$$\frac{4P}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^2=\frac{mv_{\max}^2}{2}\ \Rightarrow\ v_{\max}=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{m}}.$$

Второй способ — через энергии трёх станций по отдельности ($Pr^2/2$ у каждой): в O сумма $\frac{P}{2}(\frac{l^2}{4}+\frac{l^2}{4})+\frac{2P}{2}\frac{l^2}{4}=\frac{Pl^2}{2}$, в M — $\frac{P}{2}(\frac{3l^2}{16}+\frac{7l^2}{16})+\frac{2P}{2}\frac{l^2}{16}=\frac{3Pl^2}{8}$; разность $\frac{Pl^2}{8}=\frac{mv_{\max}^2}{2}$ — то же.

Пункт 3. Наименьшее расстояние до C. Колебания симметричны относительно M: из O (на $l/4$ от M) корабль доходит до точки на $l/4$ по другую сторону от M — это ровно точка C ($CM=l/4$). Корабль долетает до станции C:

$$r_{\min}=0.$$

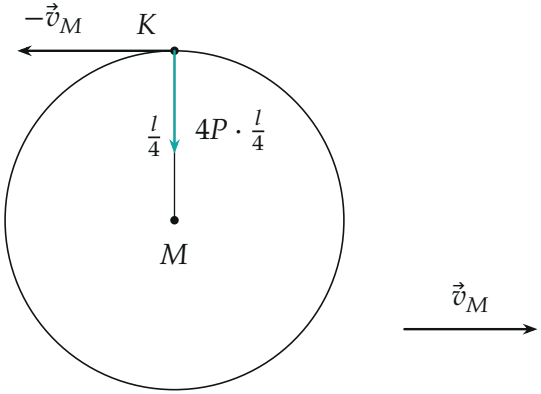
Пункт 4. Движущаяся станция. Формула $\vec F=-4P\overrightarrow{MK}$ верна в любой момент, только M теперь движется. Скорость центра масс:

$$\vec v_M=\frac{m\vec v_A+m\vec v_B+2m\vec v_C}{4m}=\frac{\vec u}{2},\qquad v_M=\frac{u}{2}=v_{\max}.$$

Точка M движется равномерно и прямолинейно — её система отсчёта инерциальна, сила в ней та же. В ней корабль в начальный момент находится на расстоянии $MK=l/4$ и имеет скорость $-\vec v_M$ модулем $v_{\max}$, перпендикулярную MK (по условию $\vec u\perp CK$).

Почему окружность. Для движения по окружности радиусом $r=l/4$ под силой $4Pr$ нужна скорость из второго закона Ньютона $\frac{mv^2}{r}=4Pr$: $v=2r\sqrt{P/m}=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{m}}=v_{\max}$ — ровно такая и есть. Значит, в системе M корабль равномерно движется по окружности с центром M и периодом

$$T=\frac{2\pi r}{v_{\max}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{4P}}=\pi\sqrt{\frac{m}{P}}.$$



Система отсчёта точки M: начальная скорость корабля v_{max} перпендикулярна MK и как раз такая, какая нужна для движения по окружности радиусом $l/4$.

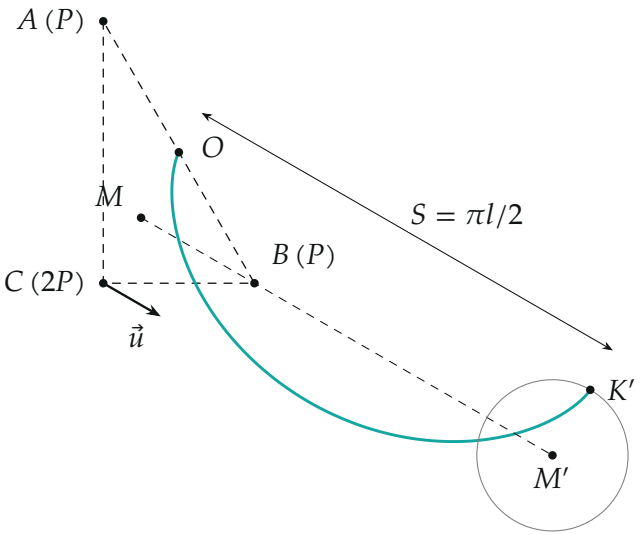
Когда корабль остановится. В лабораторной системе скорость корабля $\vec{v} = \vec{v}_M + \vec{v}_{\text{отн}}$; она равна нулю, когда $\vec{v}_{\text{отн}} = -\vec{v}_M$, т. е. когда корабль на окружности в той же точке, что вначале. Впервые после старта — через полный оборот:

$$t = T = \pi\sqrt{\frac{m}{P}}.$$

За оборот перемещение относительно M нулевое, значит, корабль сместился вместе с M:

$$S = v_{\max}T = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{m}} \cdot \pi\sqrt{\frac{m}{P}} = \frac{\pi l}{2}.$$

Траектория — циклоида (окружность, катящаяся со скоростью своего обода).



Траектория корабля в пункте 4 (бирюзовая), вычислена по формуле «окружность радиусом $l/4$ + равномерное движение центра M со скоростью $u/2$»; через время T корабль останавливается в K', на $\pi l/2$ от начальной точки O.

Обратите внимание. В пункте 4 станция C движется, но удобная точка — не C, а центр масс M: он движется вдвое медленнее, и только в его системе сила — одна «пружина» с неподвижным центром.

Проверка. Размерность: P — Н/м, $\sqrt{P/m}$ — с^{-1}, $v_{\max}$ — м/с, T — с. Численное интегрирование уравнения движения корабля с тремя станциями (движущейся C) даёт первую остановку при $t = 3{,}1416\sqrt{m/P}$ на расстоянии $1{,}5708\,l$ от O — совпадает с $\pi\sqrt{m/P}$ и $\pi l/2$. Смысл: линейная сила превращает задачу трёх тел в задачу об одной пружине, закреплённой в центре масс станций.

Ответ. 1) до станции $2P$ — $l/4$, до станций P — $\sqrt{3}\,l/4$ (у угла 60°) и $\sqrt{7}\,l/4$ (у угла 30°); 2) $v_{\max} = \dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{P}{m}}$; 3) 0 (корабль долетает до станции); 4) через $T = \pi\sqrt{\dfrac{m}{P}}$ на расстоянии $S = \dfrac{\pi l}{2}$.