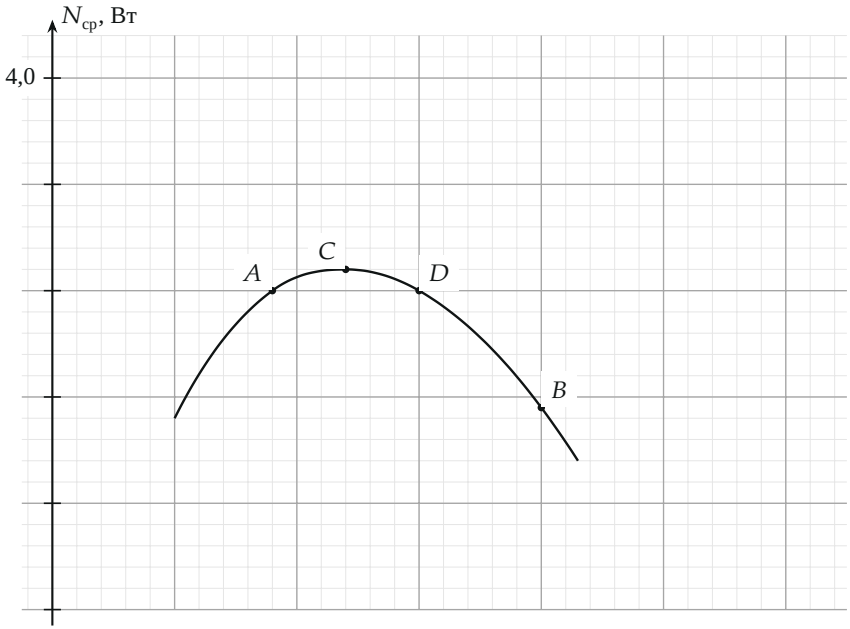
Горячо–холодно

Задача 4. [ВсОШ 2024/25, 9 класс, задача 4] «Горячо–холодно».

На рисунке приведён фрагмент графика зависимости от времени τ средней мощности $N_{ср}$, равной отношению суммарного количества теплоты, переданного слитку серебра массой $m = 50$ г, ко времени его теплообмена с внешними телами. Через некоторое время после начала теплообмена температура слитка в состоянии A увеличилась до $t_A = 40$ °C, а спустя ещё 2,2 мин (в состоянии B) она вновь оказалась равна t_A. Удельная теплоёмкость серебра $c = 240$ Дж/(кг · °C).

1. Восстановите координатные оси графика и их масштаб, если известно, что начало оси времени совпадает с началом оси $N_{ср}$.
2. Найдите начальную температуру t_0 слитка серебра (при $\tau = 0$).
3. Найдите температуры слитка, средние и мгновенные мощности теплообмена с внешними телами в состояниях, соответствующих точкам C и D.



▲ **Решение. Что происходит.** Слиток то получает, то отдаёт теплоту. По определению средней мощности $N_{\text{ср}}\tau = Q$ — вся теплота, полученная слитком от начала до момента τ. На графике это площадь прямоугольника со сторонами τ и $N_{\text{ср}}$ под точкой кривой. Теплота однозначно задаёт температуру: $Q = cm(t - t_0)$. Главная идея задачи: равные температуры — равные площади прямоугольников. Мгновенная мощность — скорость роста этой площади.

Обозначения. $Q(\tau) = N_{\text{ср}}\tau$ — теплота, полученная слитком к моменту τ; $N_{\text{мгн}} = dQ/d\tau$ — мгновенная мощность; $\tau_A, \tau_B, \ldots$ и $N_A, N_B, \ldots$ — координаты точек графика; $cm = 240 \cdot 0{,}05 = 12$ Дж/°C — теплоёмкость слитка.

Пункт 1. Оси и масштаб.

1. Связь теплоты и площади. Уравнение теплового баланса для слитка от начала до момента τ (слиток нагревается или остывает только за счёт теплообмена, фазовых переходов нет):

$$cm\,(t - t_0) = Q = N_{\text{ср}}\,\tau.$$

В состояниях A и B температура одна и та же, t_A, значит, одинакова и полученная теплота:

$$N_A\tau_A = N_B\tau_B.$$

Это и есть равенство площадей двух прямоугольников на рисунке ниже.

2. Масштаб оси времени. Вертикальная ось $N_{\text{ср}}$ проходит на одну крупную клетку левее первой вертикальной линии сетки; начала осей совпадают, поэтому $\tau = 0$ — на этой оси. Пусть одна клетка по горизонтали — это s минут. Точка A лежит в 1,8 клетки от оси, точка B — в 4,0 клетки. По условию $\tau_B - \tau_A = 2{,}2$ мин:

$$4{,}0s - 1{,}8s = 2{,}2 \text{ мин} \;\Rightarrow\; s = 1 \text{ мин}, \qquad \tau_A = 1{,}8 \text{ мин}, \quad \tau_B = 4{,}0 \text{ мин}.$$

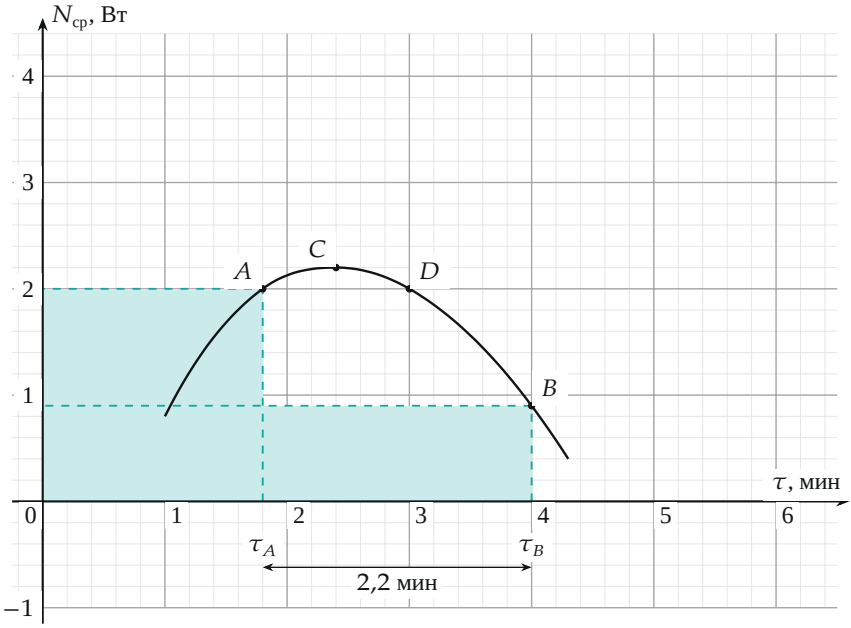
3. Масштаб и нуль оси мощности. Известна одна отметка: 4,0 Вт у верхней линии сетки. Пусть клетка по вертикали — u Вт. Точка A на 2 клетки ниже отметки 4,0, точка B — на 3,1 клетки, поэтому $N_A = 4 - 2u$,

$N_B = 4 - 3{,}1u$ (в ваттах). Подставим в равенство площадей:

$$1{,}8\,(4 - 2u) = 4{,}0\,(4 - 3{,}1u) \;\Rightarrow\; 8{,}8u = 8{,}8 \;\Rightarrow\; u = 1 \text{ Вт}.$$

Отсюда $N_A = 2$ Вт, $N_B = 0{,}9$ Вт, а $N_{\text{ср}} = 0$ на четыре клетки ниже отметки 4,0 — это вторая снизу горизонтальная линия сетки. Через неё проводим ось τ.

Проверка равенства площадей: $2 \cdot 1{,}8 = 3{,}6$ и $0{,}9 \cdot 4{,}0 = 3{,}6$ (Вт·мин) — сходится.



Восстановленные оси: прямоугольники под точками A и B равновелики — слиток получил одинаковую теплоту, и его температура одинакова.

Второй способ проверить ось — геометрия гиперболы. Точки с одной температурой лежат на гиперболе $N_{\text{ср}}\tau = \text{const}$. У прямоугольника с вершинами $A = (\tau_A, N_A)$ и $B = (\tau_B, N_B)$ две другие вершины (τ_A, N_B) и (τ_B, N_A) лежат на прямой через начало координат: $N_A/\tau_B = N_B/\tau_A$ — то же равенство площадей. С найденными осями: $2/4 = 0{,}5$ и $0{,}9/1{,}8 = 0{,}5$.

Пункт 2. Начальная температура. Из уравнения баланса для состояния A (время — в секундах, $\tau_A = 108$ с):

$$t_0 = t_A - \frac{N_A \tau_A}{cm} = 40 - \frac{2 \cdot 108}{12} = 40 - 18 = 22\ ^\circ\text{C}.$$

Пункт 3. Точки C и D.

1. Средние мощности и температуры. По восстановленным осям $C = (2{,}4$ мин; $2{,}2$ Вт) — вершина кривой, $D = (3{,}0$ мин; $2{,}0$ Вт). Из уравнения баланса

$$t_C = t_0 + \frac{N_C \tau_C}{cm} = 22 + \frac{2{,}2 \cdot 144}{12} \approx 48{,}4\ ^\circ\text{C},$$

$$t_D = t_0 + \frac{N_D \tau_D}{cm} = 22 + \frac{2 \cdot 180}{12} = 52\ ^\circ\text{C}.$$

2. Мгновенная мощность через график средней. Рассмотрим маленький промежуток времени $d\tau$ около момента τ. За него слиток получает теплоту $dQ = N_{\text{мгн}}\, d\tau$. Эта же теплота — прирост площади прямоугольника $Q = N_{\text{ср}}\tau$: ширина растёт на $d\tau$, высота — на $dN_{\text{ср}}$:

$$dQ = (N_{\text{ср}} + dN_{\text{ср}})(\tau + d\tau) - N_{\text{ср}}\tau \approx N_{\text{ср}}\, d\tau + \tau\, dN_{\text{ср}}$$

(произведение $dN_{\text{ср}}\, d\tau$ — малая второго порядка, его отбрасываем). Делим на $d\tau$:

$$N_{\text{мгн}} = N_{\text{ср}} + \tau \frac{dN_{\text{ср}}}{d\tau} = N_{\text{ср}} + k\tau,$$

где k — наклон касательной к графику $N_{\text{ср}}(\tau)$ в этой точке.

Удобный геометрический смысл. Касательная в точке $(\tau, N_{\text{ср}})$ — это прямая $N = N_{\text{ср}} + k(\tau' - \tau)$. При $\tau' = 2\tau$ она даёт как раз $N_{\text{ср}} + k\tau = N_{\text{мгн}}$: *мгновенная мощность — высота касательной при удвоенном времени*.

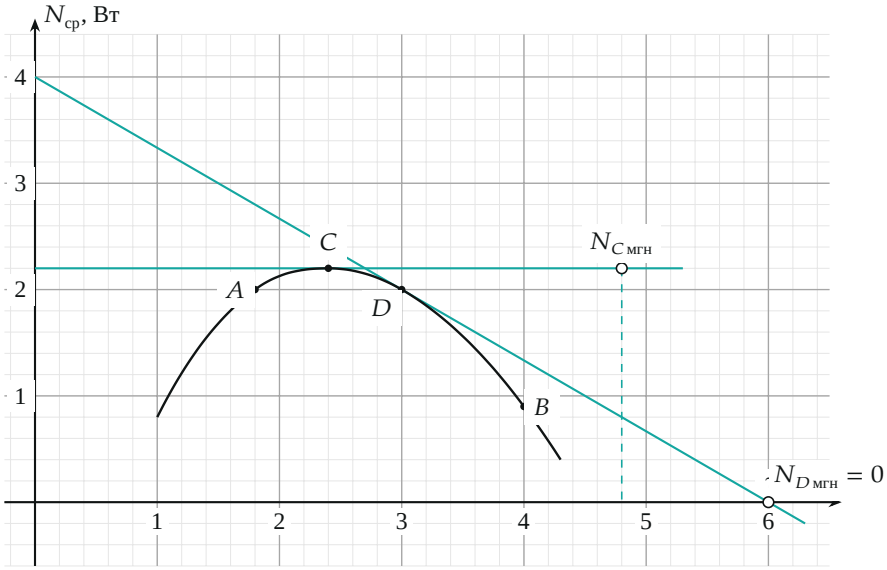
3. Касательные в C и D. В точке C кривая имеет вершину, касательная горизонтальна, $k_C = 0$:

$$N_{C\,\text{мгн}} = N_C = 2{,}2\ \text{Вт}.$$

Касательная в точке D проходит через точки $(0;\ 4\ \text{Вт})$ и $(6\ \text{мин};\ 0)$, её наклон $k_D = -\frac{4\ \text{Вт}}{6\ \text{мин}} = -\frac{2}{3}$ Вт/мин:

$$N_{D\,\text{мгн}} = N_D + k_D\tau_D = 2 - \frac{2}{3}\cdot 3 = 0.$$

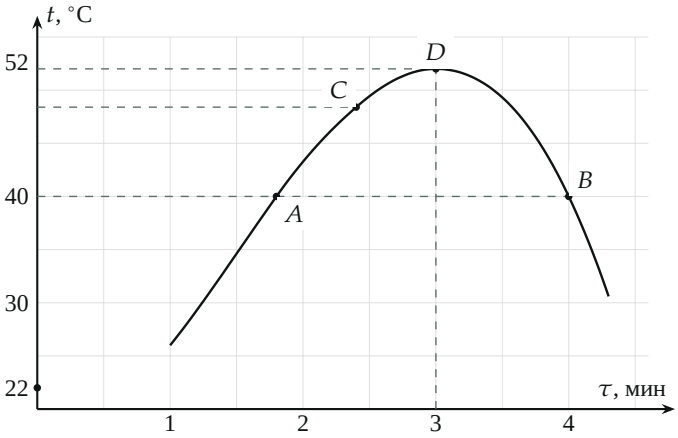
Знак: в момент D слиток не получает и не отдаёт теплоты — после него он остывает.



Касательные в точках C и D. Мгновенная мощность — высота касательной при удвоенном времени: 2,2 Вт при $\tau = 4{,}8$ мин и 0 при $\tau = 6$ мин.

Обратите внимание: в точке C максимальна *средняя* мощность, а не температура. Температура максимальна там, где $N_{\text{мгн}} = 0$, то есть в точке D: до неё слиток нагревался ($N_{\text{мгн}} > 0$), после — остывает. Поэтому из C в D температура ещё растёт, с 48,4 до 52 °C, хотя $N_{\text{ср}}$ уже падает.

4. Температура слитка по графику. Пересчитаем каждую точку кривой по формуле $t = t_0 + N_{\text{ср}}\tau/(cm)$, то есть $t = 22 + 5N_{\text{ср}}\tau$ при $N_{\text{ср}}$ в ваттах и τ в минутах. Получился график, на котором видно всё сказанное: $t_A = t_B = 40$ °C, максимум 52 °C ровно в момент D.



Температура слитка, вычисленная по графику средней мощности. «Горячо» — в момент D, дальше слиток остывает.

Проверка. Размерность: $[N\tau/(cm)] = \text{Дж}/(\text{Дж}/^\circ\text{C}) = {}^\circ\text{C}$. Второй способ для D: на графике $t(\tau)$ точка D — максимум, касательная горизонтальна, значит, $dQ/d\tau = cm\,dt/d\tau = 0$, как и получилось через касательную к $N_{\text{ср}}(\tau)$. В точке C производная $N_{\text{ср}}$ равна нулю, и мгновенная мощность совпадает со средней — как у функции в её экстремуме.

Ответ. 1) одна крупная клетка — 1 мин по оси τ и 1 Вт по оси $N_{\text{ср}}$; ось τ — вторая снизу горизонтальная линия сетки ($N_{\text{ср}} = 0$), ось $N_{\text{ср}}$ — данная вертикальная ось ($\tau = 0$); $\tau_A = 1{,}8$ мин, $\tau_B = 4{,}0$ мин; 2) $t_0 = 22\ ^\circ\text{C}$; 3) $t_C \approx 48{,}4\ ^\circ\text{C}$, $N_{C\,\text{ср}} = N_{C\,\text{мгн}} \approx 2{,}2$ Вт; $t_D = 52\ ^\circ\text{C}$, $N_{D\,\text{ср}} = 2$ Вт, $N_{D\,\text{мгн}} = 0$.