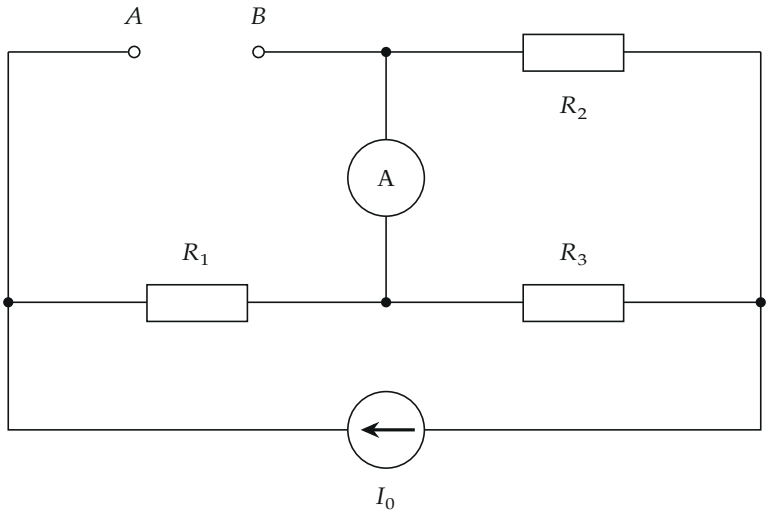
Неламповый диод

Задача 5. [ВсОШ 2024/25, 9 класс, задача 5] «Неламповый диод».

На рисунке изображена схема электрической цепи с регулируемым источником тока. Такой источник выдаёт во внешнюю цепь электрический ток заданной силы, а напряжение на его выходах подстраивается под параметры внешней цепи.



При подключении к контактам A и B последовательно соединённых диода и лампы показания амперметра равны нулю при двух ненулевых значениях силы тока через источник I_{01} и I_{02}.

Считайте, что сила тока $I_л$, протекающего через лампу, и напряжение на ней связаны соотношением:

$$I_л = \alpha U_л^{2/3}.$$

Для диода сила тока $I_д$ пропорциональна квадрату напряжения на нём:

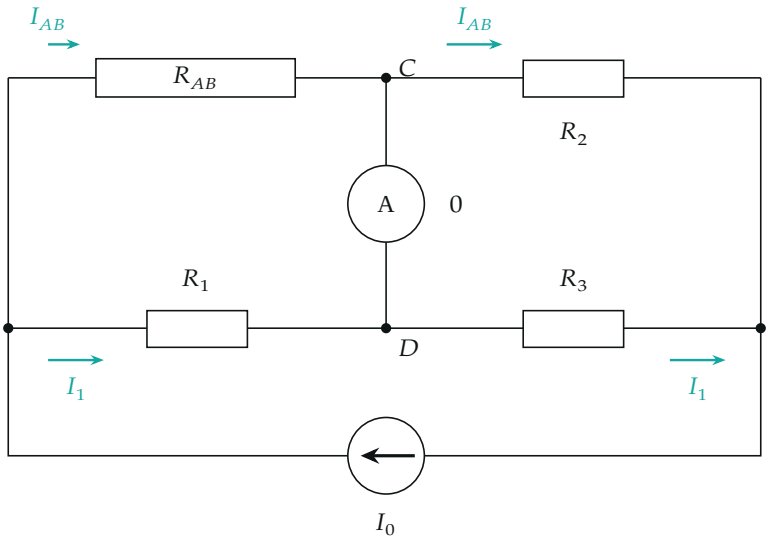
$$I_д = \beta U_д^2.$$

Сопротивления резисторов R_1, R_2 и R_3, а также коэффициенты α и β **неизвестны**.

1. При каком ненулевом значении силы тока I_{03} источника показания амперметра будут равны нулю, если к точкам A и B подключить только лампу?
2. При каком ненулевом значении силы тока I_{04} источника показания амперметра будут равны нулю, если к точкам A и B подключить только диод?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Цепь — мост: в верхней ветви элемент между A и B и резистор R_2, в нижней — R_1 и R_3, амперметр соединяет их средние точки. Нулевой ток через амперметр — условие баланса моста, оно связывает *статическое* сопротивление U/I элемента с резисторами. У нелинейного элемента это сопротивление зависит от тока, поэтому баланс наступает только при определённых токах. Класс задачи: нелинейный элемент в цепи — статическое сопротивление как функция тока, затем уравнение на ток.

Обозначения. C и D — узлы, к которым подключён амперметр; I_{AB} — ток через элемент между A и B, U_{AB} — напряжение на нём, $R_{AB} = U_{AB}/I_{AB}$ — его статическое сопротивление; I_1 — ток нижней ветви; $R_* = R_1R_2/R_3$; $k = R_3/(R_2 + R_3)$; $x = \sqrt{I_{AB}}$.



Мост в равновесии: через амперметр тока нет, верхняя ветвь несёт I_{AB}, нижняя — I_1.

1. Условие баланса. Ток через амперметр равен нулю — значит, потенциалы узлов C и D равны: амперметр идеальный, без тока на нём нет напряжения. Тогда ток верхней ветви один и тот же через элемент AB и через R_2, ток нижней — один и тот же через R_1 и R_3. Равенство напряжений слева от узлов и справа от них (закон Ома для каждого участка):

$$I_{AB}R_{AB} = I_1R_1, \qquad I_{AB}R_2 = I_1R_3.$$

Делим первое на второе — токи уходят:

$$\frac{R_{AB}}{R_2} = \frac{R_1}{R_3} \;\Rightarrow\; R_{AB} = \frac{R_1R_2}{R_3} = R_*.$$

2. Ток через элемент при балансе. Узлы C и D имеют одинаковый потенциал, поэтому ветви «AB — R_2» и «R_1 — R_3» стоят между одними и теми же точками; на правых участках напряжение одно: $I_{AB}R_2 = I_1R_3$, а по первому правилу Кирхгофа для левого узла $I_{AB} + I_1 = I_0$. Отсюда

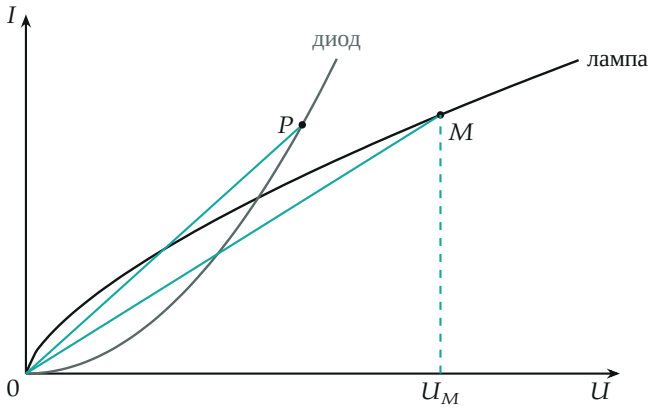
$$I_{AB} = I_0\frac{R_3}{R_2 + R_3} = kI_0.$$

Коэффициент k не зависит от элемента: ток через элемент при балансе пропорционален току источника.

3. Статические сопротивления лампы и диода. Выразим напряжения через ток из ВАХ: $U_л = (I/\alpha)^{3/2}$, $U_д = \sqrt{I/\beta}$. Тогда

$$R_л = \frac{U_л}{I} = \frac{\sqrt{I}}{\alpha^{3/2}}, \qquad R_д = \frac{U_д}{I} = \frac{1}{\sqrt{\beta}\,\sqrt{I}}.$$

У лампы сопротивление растёт с током (нить греется), у диода — падает. На графике ВАХ статическое сопротивление — величина, обратная наклону хорды из начала координат в рабочую точку.



ВАХ лампы и диода. Статическое сопротивление в точке — U/I, обратный наклон хорды из нуля (бирюзовые отрезки): у лампы хорда с ростом U ложится, у диода — встаёт.

Обратите внимание: в условии баланса стоит именно статическое сопротивление U/I, а не дифференциальное dU/dI: в балансе важны полные напряжения на участках, а не их приращения.

4. Последовательно лампа и диод. Ток через них один, I_{AB}, напряжения складываются, значит, складываются и статические сопротивления. Условие баланса:

$$\frac{x}{\alpha^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}\,x} = R_*, \qquad x = \sqrt{I_{AB}}.$$

Умножим на $\alpha^{3/2}x$ — получилось квадратное уравнение относительно x:

$$x^2 - \alpha^{3/2}R_*\,x + \frac{\alpha^{3/2}}{\sqrt{\beta}} = 0.$$

Его два положительных корня $x_1 = \sqrt{kI_{01}}$ и $x_2 = \sqrt{kI_{02}}$ — это и есть два значения тока из условия. По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = \alpha^{3/2}R_*, \qquad x_1x_2 = \frac{\alpha^{3/2}}{\sqrt{\beta}}.$$

Неизвестные α, β, R_* по отдельности не найти, но нужны нам только эти две комбинации.

Пункт 1. Только лампа. Условие баланса $\sqrt{I_{AB}}/\alpha^{3/2} = R_*$, то есть

$$x_3 = \alpha^{3/2} R_* = x_1 + x_2,$$

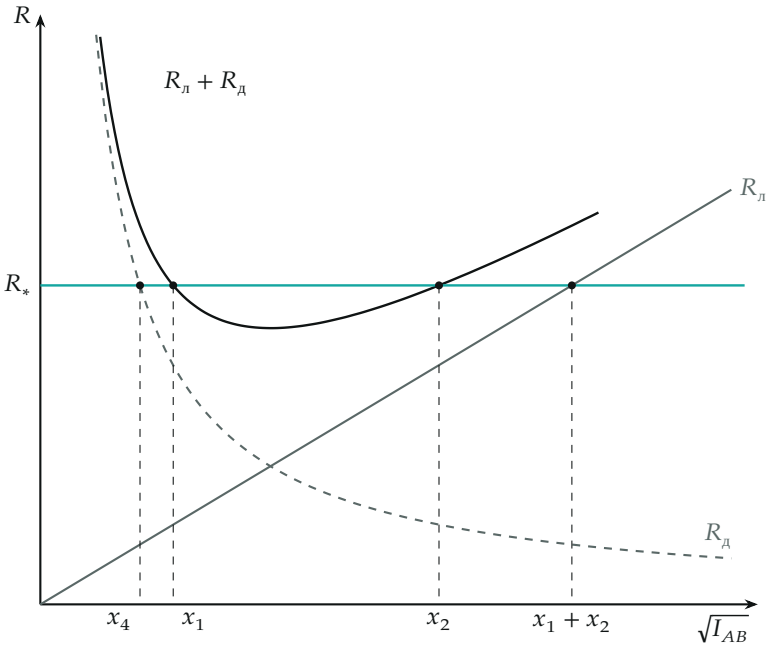
$$\sqrt{kI_{03}} = \sqrt{kI_{01}} + \sqrt{kI_{02}} \;\Rightarrow\; I_{03} = \left(\sqrt{I_{01}} + \sqrt{I_{02}}\right)^2.$$

Пункт 2. Только диод. Условие баланса $1/(\sqrt{\beta}\, x_4) = R_*$:

$$x_4 = \frac{1}{\sqrt{\beta}\, R_*} = \frac{x_1 x_2/\alpha^{3/2}}{(x_1 + x_2)/\alpha^{3/2}} = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2},$$

$$I_{04} = \frac{I_{01} I_{02}}{\left(\sqrt{I_{01}} + \sqrt{I_{02}}\right)^2}.$$

Множитель k в обоих пунктах сократился: он одинаковый во всех опытах.



Сопротивления как функции $x = \sqrt{I_{AB}}$ (пример $x_1 = 1$, $x_2 = 3$): прямая $R_л$, гипербола $R_д$ и их сумма. Уровень баланса R_* пересекает сумму в x_1 и x_2, лампу — в $x_1 + x_2$, диод — в $x_4 = x_1x_2/(x_1 + x_2)$.

Проверка. Размерность: I_{03} и I_{04} — токи (сумма корней из токов в квадрате, произведение токов на ток). Предельный случай: при $I_{01} = I_{02} = I$ (касание) $I_{03} = 4I$, $I_{04} = I/4$, и $I_{03}I_{04} = I_{01}I_{02}$ — это следует и из рисунка: $x_3x_4 = x_1x_2$. Численная проверка (python): при $R_1 = 4$, $R_2 = 6$, $R_3 = 2$, $\alpha = 0{,}7$, $\beta = 0{,}3$ прямое решение уравнений баланса даёт $I_{03} = 197{,}6$ и $I_{04} = 0{,}092$, формулы ответа — 197,6 и 0,092 (в единицах той же системы).

Физический смысл: лампа «тяжелеет» с током, диод «легчает», поэтому сумма имеет минимум, и баланс наступает дважды; лампе одной нужен больший ток, чем в обоих опытах, а диоду — меньший.

Ответ. 1) $I_{03} = \left(\sqrt{I_{01}} + \sqrt{I_{02}}\right)^2$; 2) $I_{04} = \dfrac{I_{01}I_{02}}{\left(\sqrt{I_{01}} + \sqrt{I_{02}}\right)^2}$.